المحاضرة الرابعة

تمرين:

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية في جوار النقطة $x_0 = 0$

$$(x^2-1)y'' + 2x.y' - 6y = 0$$

مثال: أوجد الحل للمعادلة التفاضلية التالية في جوار النقطة $x_0 = 0$

$$(x^2-1)y'' + 2x.y' - K(K+1)y = 0$$

وتدعى هذه المعادلة معادلة ليجندر التفاضلية من المرتبة K

الحل:

- إن $x_0 = 0$ نقطة عادية للمعادلة التفاضلية المعطاة لذلك نبحث عن حل من الشكل: $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n . x^n$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n . c_n . x^{n-1} \quad , \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

- نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة:

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - K(K+1)y = 0$$

$$(x^2-1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n . x^{n-2} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} n . c_n x^{n-1} - K(K+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n . x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} n . c_n x^n$$
$$- K(K+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n . x^n = 0$$

- نبدل كل n بـ $n+2$ في السلسلة الثانية:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n . x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} \, x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} n . c_n x^n$$
$$- K(K+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n . x^n = 0$$

- نُؤمّن الحدود الدنيا للسلاسل الناتجة:

$$- c_2 - 6c_3 x + 2c_1 . x - K(K+1) c_0 - K(K+1) c_1 . x$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[n(n-1) c_n - (n+2)(n+1) c_{n+2} + 2n c_n - K(K+1) c_n \right] x^n$$
$$= 0$$

$$-2C_2 - K(K+1)C_0 + (-6C_3 + 2C_1 - K(K+1)C_1)x$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\left[-(n+1)(n+2)C_{n+2} + (n(n-1)+2n-K(K+1))C_n\right]x^n = 0$$

- بالمطابقة نجد أنّ :

⊙. $-2C_2 - K(K+1)C_0 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{K(K+1)}{2!}C_0 = -\frac{(1+K)K}{2!}C_0$

⊙ $-6C_3 + 2C_1 - K(K+1)C_1 = 0 \Rightarrow C_3 = 2C_1 - \frac{K(K+1)}{6}C_1$

$$C_3 = \frac{(2-K^2-K)}{3!}C_1 = -\frac{(K^2+K-2)}{3!}C_1 = -\frac{(K+2)(K-1)}{3!}C_1$$

$$C_3 = \frac{(2+K)(1-K)}{3!}C_1$$

⊙. $-(n+1)(n+2)C_{n+2} + (n(n-1)+2n-K(K+1))C_n = 0$

$$\Rightarrow C_{n+2} = \frac{(n(n-1)+2n-K(K+1)C_n)}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n^2-n+2n-K(K+1))}{(n+1)(n+2)}C_n$$

$$C_{n+2} = \frac{(n^2+n-K(K+1))}{(n+1)(n+2)}C_n = \frac{(n+K+1)(n-K)}{(n+1)(n+2)}.C_n \; ; n \geq 2$$

$$n=2 \Rightarrow C_4 = \frac{(2-K)(3+K)}{3.4}C_2 = \frac{(2-K)(3+K)}{3.4}\left(\frac{-K(K+1)}{2!}C_0\right)$$

$$C_4 = -\frac{(3+K)(2-K)(1+K)K}{4!}C_0$$

$$n=3 \Rightarrow C_5 = \frac{(4+K)(3-K)}{4.5}C_3 = \frac{(4+K)(3-K)}{4.5}\left(\frac{(2+K)(1-K)}{3!}C_1\right)$$

$$\Rightarrow C_5 = \frac{(4+K)(3-K)(2+K)(1-K)}{5!}C_1$$

- نعوض الثوابت في الحل العام :

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

$$y = C_0 + C_1 x + \left(\frac{-K(K+1)}{2!} C_0\right) x^2 + \left(\frac{(2+K)(1-K)}{3!} C_1\right) x^3$$

$$+ \left(-\frac{(3+K)(2-K)(1+K)K}{4!} C_0\right) x^4$$

$$+ \left(\frac{(4+K)(3-K)(2+K)(1-K)}{5!} C_1\right) x^5 + \cdots + C_n x^n + \cdots = 0$$

$$\Rightarrow y = C_0 \left(1 - \frac{K(K+1)}{2!} - \frac{(3+K)(2-K)(1+K)K}{4!} + \cdots\right)$$

$$+ C_1 \left(x + \frac{(2+K)(1-K)}{3!} + \frac{(4+K)(3-K)(2+K)(1-K)}{5!} + \cdots\right)$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة .

- انتهت المحاضرة -