Subject: 29/ 4 /2014

«المحاضرة الثالثة عشر»

5.11. تمهيدية غاوس : "Gauss lemma"

- إذا كانت R UFD فإن $R[x]$ تكون UFD ..

الإثبات :

- لتكن $0 \neq f \in R[x]/U(R[x])$ ، حيث أن: $f=\sum_{i=0}^{n} a_i.x^i \wedge a_i \in R$
$\wedge \deg(f)=n$

* بما أن R هي حلقة تحليل وحيد فإن: $a_0,a_1,\dots\dots,a_n \in R$
فيكون: $d=\gcd(a_0,a_1,\dots,a_n)\in R$

- لنعرف الحدودية :
لأن المجموع سيكون محدوداً
$f'=\sum_{i=0}^{n} b_i.x^i \in R[x]$: $\left(b_i=\frac{a_i}{d}\in R\right)$
ومنه : $\deg(f')=\deg(f)$

- لنثبت بالاستقراء الرياضي على درجة f - n - ، بأن الحدودية f تكتب على شكل جداء منتهي لعناصر غير قابلة للتحليل في R وبشكل وحيد.
« وعندئذٍ حسب المبرهنة السابقة تكون $R[x]$ هي UFD »

* من أجل $\boxed{n=0}$: أي : $\deg(f)=0$ ، ومنه : $f\in R$ ..
وبما أن R هي UFD فإن f يكتب على شكل جداء منتهي لعناصر غير قابلة للتحليل في R وبشكل وحيد.
وبما أن كل عنصر غير قابل للتحليل في R هو غير قابل للتحليل في $R[x]$ .. (مبرهنة)
يتم المطلوب.

** لنفرض صحة القضية من أجل كل الحدوديات التي درجتها أصغر من n ، ولنبرهن صحتها لأجل الحدودية من الدرجة (n) ..
- نوجد $c\in R$ .. بحيث : « $f=c.f'$ »
ونميز الحالات التالية :

1 - f' غير قابلة للتحليل في $R[x]$. (لأن إذا $f = h.g$ حيث $(g \in U(R)$ $\vee$ $(h \in U(R))$ لـ)

ومنه فإن f تكتب على شكل جداء منتهي لعناصر غير قابلة للتحليل في $R[x]$ وبشكل وحيد .. لأن :

$f = c.f'$ ، f' غير قابلة للتحليل في $R[x]$.

و $c \in R$ و R هي UFD فكل عنصر منها تكتب على شكل جداء منتهي لعناصر غير قابلة للتحليل ، وبما أن كل عنصر غير قابل للتحليل في R هو غير قابل للتحليل في $R[x]$ (مبرهنة) ..

فإن c تكتب على شكل جداء منته لعناصر غير قابلة للتحليل في $R[x]$ ، أي :

$$c = \prod_{i=1}^{m} q_i(x) \quad : q_i \in R[x] \wedge q_i \notin U(R)$$

وبالتالي :

$$f = f' . \prod_{i=1}^{m} q_i(x)$$

وهو جداء منتهي لعناصر (q_i) غير قابلة للتحليل في $R[x]$ ويكتب بشكل وحيد.

2 - f' قابلة للتحليل في $R[x]$.

أي أن : $f' = \prod_{i=1} p_i(x)$ بحيث : $0 \neq p_i(x) \notin U(R[x])$
$\wedge \ 0 < \deg(p_i(x)) < n$

- وبالتالي تكون $p_i(x)$ تكتب على شكل جداء منتهي لعناصر غير قابلة للتحليل في $R[x]$ وبشكل وحيد ، (وحسب الفرض الاستقرائي)

حيث : $p_i(x) = \prod_{j=1}^{L} q_j(x)$: $q_j(x)$ عناصر غير قابلة للتحليل في $R[x]$

وبما أن : $(c \in R)$ و $(R$ هي $UFD)$ فإن c تكتب على شكل جداء منتهي لعناصر غير قابلة للتحليل في R ، وإن كل عنصر غير قابل للتحليل في R هو غير قابل للتحليل في $R[x]$ .. أي :

$c = \prod_{i=1}^{k} g_i(x)$ ، حيث : $g_i(x)$ غير قابل للتحليل في $R[x]$ ، ومنه تكون :

$$f = c \cdot f' = \prod_{i=1}^{k} g_i(x) \cdot \prod_{j=1}^{L.m} q_j(x)$$

أي أن:

$$f = g_1(x) \cdot \ldots \cdot g_k(x) \cdot q_1(x) \ldots q_{L.m}(x)$$

أي أن:

f كتبت على شكل جداء منتهي لعناصر غير قابلة للتحليل من $R[x]$ وبشكل وحيد.

وبالتالي: $R[x]$ تكون هي UFD .

#

<أمثلة>:

1 - $\mathbb{Z}$ هي UFD $\Leftarrow$ $\mathbb{Z}[x]$ هي UFD .

2 - R هي UFD $\Leftarrow$ $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ هي UFD ..

* - سؤال: هل $\mathbb{Z}[x]$ هي UFD ؟

- الحل: $\mathbb{Z}$ هي منطقة اقليدية (حسب مثال سابق) $\Leftarrow$ (حسب مبرهنة 3-5) $\mathbb{Z}$ هي PID

$\Leftarrow$ (حسب مبرهنة 5-5) $\mathbb{Z}$ هي UFD $\Leftarrow$ (حسب خاصة) $\mathbb{Z}[x]$ هي UFD.

3 - $R=(\mathbb{Z}[x],+,\cdot)$ ليست منطقة اقليدية.

لأن: $\exists\, a = x^2 \wedge b = 2x+1 \in R/\{0\}$

ولكن: $\nexists\, q, r \in R : a = bq + r$

ويكون.. $((r=0) \vee (\deg(r) < \deg(b)))$

تمرين:

$R = (\mathbb{Z}\sqrt{d}, +, \cdot)$ هي UFD $\Leftrightarrow$ $d = \{\pm 1, \pm 2\}$

((الحل)) .

$(\Rightarrow)$ من أجل $(n=-2)$:

R هي (ID) .. (تحقق من ذلك)..

لنعرف التابع: $\varphi : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$

$\forall x \in R\setminus\{0\} ;\ x = a + b\sqrt{-2}\ ,\ \varphi(x) = |a^2 - 2b^2|$:

$\forall x, y \in R\setminus\{0\} ;\ x \cdot y^{-1} \in \mathbb{Q}\sqrt{-2}\ : xy^{-1} = a + b\sqrt{-2} \wedge a, b \in \mathbb{Q}$ ~

$\Rightarrow \exists n, m \in \mathbb{Z}^+ : |a-n| < \frac{1}{2} \; , \; |b-m| < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x \cdot y^{-1} = (a-n) + (b-m)\sqrt{-2} + (n + m\sqrt{-2})$

$$x = [\underbrace{(a-n) + (b-m)\sqrt{-2}}_{q}]\,y + \underbrace{(n+m\sqrt{-2})\,y}_{r}$$

$$\Rightarrow x = q \cdot y + r$$

*- إذا كان $(r=0)$ يتم المطلوب.

*- $\varphi(r) = (\underbrace{(a-n)^2}_{< \frac{1}{4}} - \underbrace{2(b-m)^2}_{< \frac{1}{2}}) \cdot \varphi(y) < \varphi(y)$

ومنه $R=(\mathbb{Z}\sqrt{-2}, +, \cdot)$ اقليدية $\Leftarrow$ R هي PID $\Leftarrow$ R هي UFD

#

//