«المحاضرة التاسعة»

4 - 3 - المثاليات الأولية والأعظمية :

4.3.1. تعريف :

- لتكن R حلقة تبديلية ، ولتكن : $P, \mathcal{M} \trianglelefteq R$.

*)- إن P هو مثالي أولي من R .. إذا تحقق : $P \underset{\neq}{\trianglelefteq} R$ ، وتحققت إحدى الشروط التالية :

1)- if $a,b \in R$, $a.b \in P \Rightarrow a \in P \vee b \in P$.

2)- $I, J \trianglelefteq R \ni : I.J \subseteq P \Rightarrow I \subseteq P \vee J \subseteq P$.

3)- R/P «منطقة تكاملية» .. { R واحدية }.

ونرمز لمجموعة كل المثاليات الأولية من R بالرمز $\mathrm{Spec}(R)$

**)- نعرف تقاطع كل المثاليات الأولية من R بأنه الجذر الأساسي من R
ونرمز له .. $N(R)$ .. وهو معرف بالشكل :

spectrum طيف

$$N(R) = \bigcap_{P \in \mathrm{Spec}(R)} P$$

***)- إن $\mathcal{M}$ هو مثالي أعظمي من R .. إذا كان $\mathcal{M} \underset{\neq}{\trianglelefteq} R$ ، وتحقق أحد الشروط التالية :

1)- $I \trianglelefteq R : \mathcal{M} \subseteq I \subsetneq R \Rightarrow \mathcal{M} = I$

2)- $I \trianglelefteq R : \mathcal{M} \subsetneq I \subseteq R \Rightarrow I = R$

3)- $R/\mathcal{M}$ «حقل» .. { R واحدية }

ونرمز للمثالي الأعظمي بالرمز « $\mathcal{M} \triangleleft_{\circ} R$ ».

كما أننا نرمز لمجموعة كل المثاليات الأعظمية من R بالرمز $\mathcal{M}\text{-}Spec(R)$

(****) - نعرف تقاطع كل المثاليات الأعظمية من R بأنه أساس جاكبسون ، وهو معرف بالشكل:

$$J(R) = \bigcap_{\mathcal{M} \in \mathcal{M}\text{-}Spec(R)} \mathcal{M}$$

«أمثلة»:

1- $R=(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ، فإن: كل مثالي $P=\langle p\rangle$ ، مولد بعدد أولي ، هو مثالي أولي من R.

$$N(R)=\bigcap_{P\in Spec(R)} P = \{0\} \quad , \quad J(R)=0$$

2- $R=(\mathbb{Z}_{12},+,\cdot)$ ، فإن:

$$J=\langle 2\rangle \wedge I=\langle 3\rangle \in \mathcal{M}\text{-}Spec(R)$$

$$\wedge \langle 3\rangle \cap \langle 2\rangle = 6$$

* تمرين:

- لتكن R حلقة تبديلية و $\mathcal{M} \triangleleft_{\circ} R$. المطلوب:

1- بيّن أنه ليس بالضرورة أن تكون $R/\mathbb{Z}$ حقل.

2- إذا كانت R واحدية ، فإن كل مثالي أعظمي من R هو أولي ، وَ بيّن أن العكس ليس صحيح بالضرورة.

Subject: / /

الحل:

ب- $R/\mathbb{Z}$ حقل $\Leftarrow$ $R/\mathbb{Z}$ هو ID $\Leftarrow$ m مثالي أولي #

« العكس » - مثال معاكس .

لتكن $R=(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ، $I=<0>$ مثالي أولي ولكن

$I=<0>$ ليس مثالي أعظمي . #

« تمهيدية زورن » .

لتكن $(S,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً ، إذا كانت كل سلسلة متزايدة

$m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq \dots$ من عناصر S تملك حداً أعلى في S ، فإنه

يوجد عنصر أعظمي (ماجمعي الأكبر) في S .

$S=\{1,2,3,4\}$, $M=\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}\}$

مرتبة جزئياً بالنسبة لعلاقة الاحتواء .

4-3-2- مبرهنة :

- لتكن R حلقة ، $I \trianglelefteq R$ .. إن : $\sqrt{I} = \bigcap\limits_{I\subseteq P\in Spec(R)} P$

« الإثبات » .. « $\subseteq$ »

$$\forall x \in \sqrt{I} \Rightarrow \exists n\in \mathbb{N} : x^n \in I$$

$$\Rightarrow x^n \in I \subseteq P \in Spec(R) \Rightarrow x\in P : I\subseteq P$$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{I\subseteq P\in Spec(R)} P \qquad \Rightarrow \sqrt{I} \subseteq \bigcap_{I\subseteq P\in Spec(R)} P$$

#

« $\supseteq$ »

- لنفرض جدلاً أن تقاطع المثاليات التي تحوي I ليست محتواة في $\sqrt{I}$

$$\Leftrightarrow \bigcap_{I\subseteq P\in Spec(R)} P \not\subseteq \sqrt{I}$$

Subject: / /

$\Rightarrow \exists x \in \bigcap\limits_{I \subseteq P \in spec(R)} P \ \wedge \ x \notin \sqrt{I} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : x^n \notin I$ «من تعريف الجذر»

ولنعرف المجموعة :

$$M = \{ J \triangleleft R : I \subseteq J \ ; \ \forall n \in \mathbb{N} : x^n \notin J \}$$

* $I \in M \Rightarrow M \neq \emptyset$ → «لنحقق تمهيدية زورن»

- $(M, \subseteq)$ مجموعة مرتبة جزئياً بالنسبة لعلاقة الاحتواء .

- لتكن السلسلة المتزايدة .. $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \dots \in M$

ولتكن ،

$« J = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i »$ ← مثالي من R .. «بسبب وجود علاقة الاحتواء»

و .. $I \subseteq J$ «من تعريف M»

$\wedge \ \forall n \in \mathbb{N} : x^n \notin J$

لأنه : « إذا كان : $x^n \in J = \bigcup J_i \Leftarrow \exists J_i : x^n \in J_i$ ← تناقض »

وبالتالي : J حد أعلى للسلسلة في M .

عندئذٍ : «حسب تمهيدية زورن» فإنه يوجد m عنصر أعظمي في M .. أي أن :

$$m \triangleleft_{\circ} R \ , \ I \subseteq m \ \wedge \ \forall n \in \mathbb{N} : x^n \notin m$$

« بقي أن نثبت أنه أولي »

- لتكن : $a, b \in R : a.b \in m$

ولنفرض جدلاً أن :

$a \notin m \ \wedge \ b \notin m$ ← «حسب أعظمية m»

$$\Rightarrow \begin{cases} m \subsetneqq \langle a, m\rangle \subseteq R \\ m \subsetneqq \langle b, m\rangle \subseteq R \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle a, m\rangle \notin M \\ \langle b, m\rangle \notin M \end{cases} \Rightarrow$$ لأن m أعظمي

(جذري) $\Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} : x^{n_1} \in \langle a, m\rangle$

$\wedge\ \exists n_2 \in \mathbb{N} : x^{n_2} \in \langle b, m\rangle \Big\} \Rightarrow$

$$x^{n_1} \cdot x^{n_2} = x^{n_1+n_2} \in \langle a.b, m\rangle = m$$

أي أن:

$\exists\, n = n_1 + n_2 : x^n \in m$

هذا يناقض كون $m \in M$. أي أن الفرض الجدلي خاطئ و m مثالي أعظمي من R ..

$$\Rightarrow x \in \bigcap P \subseteq m$$

أي أن:

$\exists n = 1 : x^n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ (غير ممكن) because $m \in M$

أي: $\bigcap P \subseteq \sqrt{I}$

$\#$ $I \subseteq P \in Spec(R)$

من الاحتوائين نجد أن المساواة محققة ..

$$\sqrt{I} = \bigcap P : I \subseteq P \in Spec(R) \quad \#$$

Subject: / /

سؤال: - أثبت أن: $\sqrt{0} = \bigcap_{P \in Spec(R)} P$

إن « $I = 0$ » ، والمقصود محتوى في كل مثالي ← يتم المطلوب

$\{\overset{\text{لا متفوق}}{x} \in R : \exists n \in \mathbb{N} : x^n = 0\}$

4 - 3 - 3 مبرهنة: ((Prime Avoidance)) تجنب المثالي الأولي

- لتكن:

.. $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-2} \in Spec(R)$

- ولتكن أيضاً:

« $I, P_{n-1}, P_n \trianglelefteq R$ »

عندئذٍ: إذا كان: $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ فإن:

$\exists i \in \{1, 2, \dots, n\} : I \subseteq P_i$

« الإثبات » - بالاستقراء الرياضي على n -

*- من أجل: « $n=1$ » فإن: $I \subseteq P_1$ « محقق ».

**- نفرض صحتها لأجل: « $n-1$ » . أي:

$if\ I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n-1} P_i \Rightarrow \exists i \in \{1, 2, \dots, n\} : I \subseteq P_i$ (True)

***- نثبت صحتها لأجل « n » ...

~ لنفرض جدلاً أن:

$\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \nsubseteq P_i \iff$

$\exists x \in I \wedge x \notin P_i \;,\; \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$\Rightarrow \; x \in I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i = P_n \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} P_i \right)$

ـ هنا سوف نفرض ما يلي :

*)- if $x \in P_n \Rightarrow$ (تناقض) .. because ..

$\forall i \in \{1, \dots, n\} \;;\; x \notin P_i$

**)- if $x \in \bigcup_{i=1}^{n-1} P_i \Rightarrow$ « ماخوذ حسب الفرض الاستقرائي » $\Leftrightarrow$

$\exists i \in \{1, \dots, n\} : x \in P_i \Rightarrow$ (تناقض)

because .. $\forall i \in \{1, \dots, n\} \;;\; x \notin P_i$

ـ بالتالي .. الفرض الجدلي خاطئ .. أي أن :

$\exists i \in \{1, \dots, n\} : I \subseteq P_i$

#

كل مثالي $\neq$ الحلقة فإنه يوجد مثالي أعظمي يحويه

4-3-4- مبرهنة :

ـ لتكن R حلقة واحدية تبديلية ، إذا كان $I \underset{\neq}{\trianglelefteq} R$ فإن :

$\exists \mathcal{M} \vartriangleleft\cdot R : I \subseteq \mathcal{M}$

«الإثبات» .. «الإثبات الوجود يحتاج لزورن» إذن :

ـ لنعرف المجموعة :

$\mathcal{M} = \{ J \underset{\neq}{\trianglelefteq} R \;,\; I \subseteq J \}$

$\ast.\ I \in M \Rightarrow M \neq \emptyset$

إنَّ:

$(M, \subseteq)$ مجموعة مرتبة جزئياً .. و

$J_1 \subseteq J_2 \subseteq \dots \in M$

$$\Rightarrow J = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i \neq R \rightarrow R \text{ مثالي في}$$

«مثالي بسبب علاقة الاحتواء ولا يساوي R ، لأنه لو كان: $J = R$

$\Rightarrow \exists i \in \mathbb{N} : 1 \in J_i \Rightarrow$ (تناقض) لأن $J_i \in M$ »

$\wedge\ I \subseteq J$ becase $(\forall i \in \mathbb{N} ; I \subseteq J_i)$

$\Leftarrow J$ حد أعلى لهذه السلسلة في M .. عندئذٍ:

« حسب تمهيدية زورن » فإنه يوجد $\mathfrak{M}$ عنصراً أعظمياً في M .. أي:

$$\mathfrak{M} \triangleleft_{\circ} R \wedge I \subseteq \mathfrak{M}$$

#

4-3-5- مبرهنة:

لتكن R حلقة تبديلية واحدية ، عندئذٍ:

$$a \in J(R) \iff \forall b \in R : 1 + ab \in U(R)$$

« الكفاية » (($\Longleftarrow$))

لنفرض جدلاً أن:

$\exists b \in R : 1 + ab \notin U(R)$

$$\Rightarrow \langle 1+ab \rangle \underset{\neq}{\triangleleft} R \overset{\text{حسب المبرهنة السابقة}}{\Longrightarrow} \exists \mathfrak{M} \triangleleft_{\circ} R : \langle 1+ab \rangle \subseteq \mathfrak{M}$$

$\Rightarrow 1+ab \in M \;\wedge\; a \in J(R)$ فرضاً $\wedge$

$J(R)$ هي تقاطع كل المثاليات الأعظمية.

$\Rightarrow a \in J(R) \subseteq M$

$\Rightarrow -ab \in M$

$\Rightarrow 1 = -\overbrace{ab}^{\in M} + (\overbrace{1+ab}^{\in M}) \in M \Rightarrow$

وهذا يناقض كون M مثالي أعظمي في R.

ومنه الفرض الجدلي خاطئ .. أي

$\forall b \in R \;;\; 1+ab \in U(R)$

#

(($\Rightarrow$))

لنفرض جدلاً أن : « $a \notin J(R)$ »

حسب الشرط (2) في تعريف المثالي الأعظمي

$\Rightarrow \exists M \triangleleft_{\circ} R : a \notin M \Rightarrow M \subsetneqq \langle M, a \rangle \subseteq R$

$\Rightarrow \langle M, a \rangle = R \Rightarrow 1 \in \langle M, a \rangle$

$b \in$ المثالي $\Rightarrow -b \in$ المثالي

$\Rightarrow \exists \overset{\text{or } -b}{b} \in R \;\wedge\; \exists x \in M : 1 = x \mp ab$

$\Rightarrow x = 1 \pm ab \in U(R) \Rightarrow M = R$

$\Rightarrow$ (غير ممكن)

ومنه الفرض الجدلي خاطئ .. أي :

$a \in J(R)$

#

Subject: / /

- ملاحظة:

$$((\text{if } 1+a \in U(R) \Leftrightarrow a \in J(R)))$$

4-3-6 تعريف:

- لتكن R حلقة تبديلية .. نقول عن R أنها حلقة محلية ((local ring)) ، إذا كان في R مثالي أعظمي وحيد ..
ونرمز للحلقة المحلية بالرمز: (R, M) .

- نتيجة:

$$J(R) \triangleleft_{\circ} R \Leftrightarrow R \text{ حلقة محلية}$$

- مثال:

، كل حقل هو حلقة محلية والمثالي الأعظمي فيها هو الصفر .

#