٢٠٢٤ /١٢/١٢

٧ المحاضرة السادسة

تقطير مؤثر قطري و مصفوفة قطرية

ليكن V فضاء شعاعي منتهي البعد على حقل F و بعده n

تعريف: $f: V \to V$ لنا مؤثراً قطرياً و ما مصفوفة قطرية بالنسبة

① ما قطوراً (قابل للتقطير) إذا كانت للمؤثر ما مصفوفة قطرية بالنسبة لقاعدة مرتبة في V.

② $A \in M_n(F)$ نقول أن A قابلة للتقطير إذا كانت A تشابه مصفوفة قطرية.

③ A قطورة إذا وفقط إذا كان المؤثر الخطي $L_A: F^n \to F^n$

المؤثر بالمصفوفة A قابل للتقطير.

$$L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

مثال

$L(x,y,z) = (x-y-z,\ y-x-z,\ z-x-y)$.

$B = \{v_1 = (-1,1,0),\ v_2 = (-1,0,1),\ v_3 = (1,1,1)\}$

نوجد مصفوفة L بالنسبة للقاعدة الذاتية B ونكون

$$\left.\begin{array}{l} L(v_1) = (-2,2,0) = 2v_1 + 0v_2 + 0v_3 \\ L(v_2) = (-2,0,2) = 0v_1 + 2v_2 + 0v_3 \\ L(v_3) = (-1,-1,-1) = 0v_1 + 0v_2 - 1v_3 \end{array}\right\} \Longrightarrow H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

مثال 2: هل المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ قطورة.

الحل:

$v \neq 0 : v \in V = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \dots \quad Av = \lambda v$

$$\left.\begin{array}{l} x+y \\ -2x+4y \end{array}\right. = \left.\begin{array}{l} \lambda x \\ \lambda y \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} (1-\lambda)x + y = 0 \\ -2x + (4-\lambda)y = 0 \end{array}\right\}$$ جملة معادلات خطية متجانسة

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 \Rightarrow$$

$$0 = (\lambda-2)(\lambda-3) \Longrightarrow \boxed{\lambda_1 = 2},\ \boxed{\lambda_2 = 3}$$

$\Leftarrow \boxed{\lambda_1 = 2}$ نجد

$x = y \quad \Leftarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$

يوجد عدد لا نهائي من المتجهات الذاتية لـ $\lambda_1 = 2$ نختار منها $v_1 = (1,1)$

ومن أجل $\boxed{\lambda_2 = 3} \Longrightarrow -2x + y = 0 \Rightarrow y = 2x$

يوجد عدد لا نهائي من المتجهات الذاتية لـ $\lambda_2 = 3$ نختار منها $v_2 = (1,2)$

وبالتالي نكون $B = \{v_1, v_2\}$ قاعدة ذاتية لأن B مستقلة خطياً و

$\dim \mathbb{R}^2 = \text{card}(B) = 2$ (A)

نوجد مصفوفته ما بالنسبة للقاعدة الذاتية B

$$\left.\begin{array}{l} L(v_1)=(2,2)=2v_1+0v_2 \\ L(v_2)=(3,6)=0v_1+3v_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow H=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

مبرهنة: ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل K وبعده n. $L:V\longrightarrow V$ مؤثرا خطيا

ما قطوري $\Longleftrightarrow$ يوجد لـ V قاعدة ذاتية ومنه ما

الإثبات: $\Longleftarrow$ يوجد $H=diag(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$

$$=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

بالنسبة لقاعدة ذاتية $B=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$

$L(v_1)=Hv_1=\lambda_1v_1+0v_2+\dots+0v_n=\lambda_1v_1$

$L(v_2)=Hv_2=0v_1+\lambda_2v_2+\dots+0v_n=\lambda_2v_2$

$L(v_n)=Hv_n=0v_1+0v_2+\dots+\lambda_nv_n=\lambda_nv_n$

لدينا $\forall i\in\{1,2,\dots,n\}: L(v_i)=\lambda_iv_i \Rightarrow v_i\neq 0$ وبالتالي $\forall i\in\{1,2,\dots,n\}$

ومنه v_i شعاع ذاتي

ومنه B قاعدة ذاتية لـ V

$\Longrightarrow$ ليكن $B=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ قاعدة ذاتية لـ V ومنه $\forall i\in[1,2,\dots,n]: L(v_i)=\lambda_iv_i$

$$\left.\begin{array}{l} L(v_1)=\lambda_1v_1+0v_2+\dots+0v_n \\ L(v_2)=0v_1+\lambda_2v_2+\dots+0v_n \\ L(v_n)=0v_1+0v_2+\dots+\lambda_nv_n \end{array}\right\} \Longrightarrow H=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

وبالتالي تكون ما هي مصفوفة قطرية أي ما قطوري.

ملاحظة: ليكن $L:V\longrightarrow V$ مؤثرا خطيا على فضاء شعاعي V بعده n معرف على الحقل K.

/ /

٥. اذا كان المؤثر L يملك n قيمة ذاتية مختلفة مثنى مثنى فإن L قطوراً.

مثال: ليكن $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$L(x,y,z) = (-4x+3y+3z, -6x+5y+6z, 5z)$

١. أوجد الحدودية المميزة والأصغرية للمؤثر L.

٢. عين القيم الذاتية للمؤثر L.

٣. ناقش فيما اذا كان L قطوراً، وقطر المؤثر L إن أمكن.

٤. احسب A^{100} حيث A مصفوفة L بالنسبة للقاعدة القانونية.

الحل: ① :

$P_L(x) = (x-5)(x-2)(x+1)$

$q_L(x) = P_L(x)$

بما أن الحدودية الأصغرية تقسم الحدودية المميزة فيكون الحدودية الأصغرية الشكل التالي $(x-5)^{r_1}(x-2)^{r_2}(x+1)^{r_3}$ ولأن أصفار الحدودية المميزة هي نفس أصفار الحدودية الأصغرية فتكون الحدودية الأصغرية تساوي الحدودية المميزة

((لا يمكن تحقيق هذه الحالة إلا اذا كانت الأقواس من الدرجة الأولى))

②: حسب مبرهنة كيلي هاملتون: فإن أصفار الحدودية المميزة هي قيم ذاتية وبالتالي فإنه $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$

③. بما أن للمؤثر الخطي L ثلاث قيم ذاتية مختلفة وبعد الفضاء وهو 3 فيكون المؤثر الخطي L يملك قاعدة ذاتية ويكون قابل للتقطير

- لحساب القاعدة الذاتية يكون $B = \{b_1 = (1,2,1), b_2 = (1,2,0)$
$b_3 = (1,1,0)\}$

نوجد مصفوفة L بالنسبة للقاعدة B

$L(b_1) = (5,10,5) = 5b_1 + 0b_2 + 0b_3$

$L(b_2) = (2,4,0) = 0b_1 + 2b_2 + 0b_3$

$L(b_3) = (-1,-1,0) = 0b_1 + 0b_2 - b_3$

$\Rightarrow H = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

بما أن H و A متشابهات فإنه $\exists\, S \in M_3(\mathbb{R})$

$$A = S^{-1} H S \Rightarrow$$

$$A^{100} = S^{-1} H^{100} S$$

حيث S مصفوفة الانتقال من القاعدة القانونية إلى B

S^{-1} مصفوفة الانتقال من B إلى القانونية.

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (5)^{100} & 0 & 0 \\ 0 & (2)^{100} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

تمرين: - ليكن $L: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ مؤثر خطي

$$L(x,y,z,t) = (x-y-t,\ y-x-t,\ x+y+2z+t,\ t-x-y)$$

حسب الطلبات السابقة.