المحاضرة الخامسة

ملاحظات هامة:

- أولاً: إذا طلب منا إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + P(x).\ y' + q(x).\ y = R(x)$$

بجوار النقطة العادية $x_0 \neq 0$ عندئذ يمكن إجراء انسحاب بوضع $X = x - x_0$ والبحث عن حل من الشكل: $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$ وذلك بعد أن نكتب كلاً من R, P, q بدلالة X.

- ثانياً: إن كل نقطة شاذة لحل المعادلة التفاضلية هي نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية ولكن العكس ليس من الضروري أن يكون صحيحاً.

- أمثلة:

$\boxed{1}$. إن $y = c_1 x + c_2 x^{-2}$ هو الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0$ نلاحظ أن النقطة $x_0 = 0$ هي عادية بالنسبة للحل ولكنها شاذة نظامية بالنسبة للمعادلة التفاضلية.

$\boxed{2}$. إن $y = c_1 x^2 + \frac{c_2}{x^2}$ هو الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{4}{x^2} y = 0$$

نلاحظ أن $x_0 = 0$ هي شاذة للحل وهي شاذة نظامية للمعادلة التفاضلية.

- ثالثاً: عندما ننشر بقوى $(x - x_0)$ ~~لـ~~ نميز:

$\boxed{A}$. إذا كان: P, q كثيرتي حدود بقوى $(x - x_0)$. أيضاً عندئذ نضرب الحد العام بسلاسل هذه القوى.

- إذا كانت P, q كثيرات حدود بقوى x عندئذ نكتب P, q بقوى $(x - x_0)$ بالشكل:

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 (x - x_0) + \alpha_2 (x - x_0)^2 + \cdots$$

$$q(x) = \beta_0 + \beta_1 (x - x_0) + \beta_2 (x - x_0)^2 + \cdots$$

ثم بالفك و المطابقة نحصل على الأمثال، نعوض في نشري q, P بقوى $(x-x_0)$.

مثال: يمكن التعبير عن كثير الحدود $P(x)=x^2+1$ بقوى $(x-1)$ بالشكل التالي:

$$P(x)=x^2+1=\alpha_0+\alpha_1(x-1)+\alpha_2(x-1)^2$$
$$=\alpha_0+\alpha_1 x-\alpha_1+\alpha_2 x^2-2\alpha_2 x+\alpha_2$$
$$=\alpha_2 x^2+(\alpha_1-2\alpha_2)x+(\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2)$$

بالمطابقة نجد:

$$\boxed{\alpha_2=1},\ \alpha_1-2\alpha_2=0,\ \alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=1$$
$$\alpha_1=2\alpha_2 \Rightarrow \boxed{\alpha_1=2}$$
$$\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=1 \Rightarrow \alpha_0-2+1=1 \Rightarrow \boxed{\alpha_0=2}$$

نعوض الثوابت في $P(x)$.

$$P(x)=2+2(x-1)+(x-1)^2$$

B - يُبرهن على عدم إمكانية النشر في جوار النقطة الشاذة الغير نظامية وذلك لأن الحل في هذه الحالة لا يمكن نشره بسلسلة متزايدة القوى ومحدودة من الأسفل.

C - لإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة بقوى $(x-x_0)$، نوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة الموافقة ونوجد الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة.

و لإيجاد الحل الخاص للمعادلة الغير متجانسة نطلق من المتسلسلة الحدود التي هي من درجة كثير الحدود R ثم نطابق ونوجد الأمثال حيث أن المعادلة التفاضلية:

$$y''+P(x)\,y'+q(x).\,y=R(x).$$

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة الغير متجانسة بجوار $x_0=0$

$$y''+y=x^2+1$$

الحل:

أ- إن الحل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة $y''+y=0$ يكون من الشكل: $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$

$$x_0=0 \Rightarrow y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n \;,\; y'=\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \cdot x^{n-1}$$

$$, y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n \cdot x^{n-2}$$

- نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n \cdot x^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}\, x^n+\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)c_{n+2}+c_n\right]x^n=0$$

$$; n \geq 0$$

$$(n+1)(n+2)c_{n+2}+c_n=0 \Rightarrow c_{n+2}=-\frac{c_n}{(n+1)(n+2)}$$

وتسمى العلاقة التكرارية (التدريجية).

$$n=0 \Rightarrow c_2=-\frac{c_0}{2!} \quad , n=1 \Rightarrow c_3=-\frac{c_1}{3!}$$

$$n=2 \Rightarrow c_4=-\frac{c_2}{4\cdot 3}=-\frac{-\frac{c_0}{2!}}{4\cdot 3}=\frac{c_0}{4!}$$

$$n=3 \Rightarrow c_5=-\frac{c_3}{5\cdot 4}=-\frac{-\frac{c_1}{3!}}{5\cdot 4}=\frac{c_1}{5!}$$

$$n=4 \Rightarrow c_6=-\frac{c_0}{6!} \quad , n=5 \Rightarrow c_7=-\frac{c_1}{7!}$$

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية الموافقة هو:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots$$

$$y = C_0 + C_1 x - \frac{C_0}{2!} x^2 - \frac{C_1}{3!} x^3 + \frac{C_0}{4!} x^4 + \frac{C_1}{5!} x^5 - \frac{C_0}{6!} x^6 - \frac{C_1}{7!} x^7 + \cdots$$

$$\Rightarrow y = C_0 \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + C_1 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$y = C_0 \cdot \cos x + C_1 \cdot \sin x$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة الموافقة.

* إيجاد الحل الخاص لغير المتجانسة: $y'' + y = x^2 + 1$

نبحث عن الحل العام ونشتقه ونعوض:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n \cdot x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n = x^2 + 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) C_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n = x^2 + 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) C_{n+2} + C_n\right] x^n = x^2 + 1$$

$$(1 \cdot (2) \cdot C_2 + C_0) + (2(3) C_3 + C_1) x + (3(4) C_4 + C_2) x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) C_{n+2} + C_n\right] x^n = x^2 + 1$$

بالمطابقة نجد:

$$2C_2 + C_0 = 1 \Rightarrow C_2 = \frac{1 - C_0}{2}$$

$$6C_3 + C_1 = 0 \Rightarrow C_3 = \frac{-C_1}{6}$$

$$12C_4 + C_2 = 1 \Rightarrow C_4 = \frac{1 - C_2}{12} = \frac{1 - \frac{C_0}{2}}{12}$$

$$\Rightarrow C_4 = \frac{1 + C_0}{24}$$

$$n \geq 3 \Rightarrow (n+1)(n+2)\, C_{n+2} + C_n = 0$$

$$\Rightarrow C_{n+2} = \frac{-C_n}{(n+1)(n+2)}$$

$$n=3 \Rightarrow C_5 = \frac{-C_3}{4\cdot 5} = -\frac{\frac{-C_1}{6}}{5\cdot 4} = \frac{C_1}{5!}$$

$$n=4 \Rightarrow C_6 = -\frac{C_4}{5\cdot 6} = \frac{-\frac{1+C_0}{24}}{5\cdot 6} = \frac{-1-C_0}{6!}$$

نختار $C_1 = 0 \quad , \quad C_0 = -1$

$$C_2 = \frac{1-C_0}{2} = \frac{1-(-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$C_3 = \frac{-C_1}{6} = 0 \quad , \quad C_4 = \frac{1+C_0}{24} = \frac{1+(-1)}{24} = 0$$

$$C_5 = \frac{C_1}{5!} = 0 \quad , \quad C_6 = \frac{-1-C_0}{6!} = \frac{-1-(-1)}{6!} = 0$$

نعوض في الحل :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots$$

$$y = -1 + 0 + x^2 = x^2 - 1$$

وهو الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة .

و الحل الخاص للمعادلة المتجانسة الموافقة + الحل الخاص للمعادلة الغير متجانسة

$$\boxed{y = C_0 \cos x + C_1 \sin x + x^2 - 1}$$

تمرين وظيفة : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الغير متجانسة بجوار النقطة $x_0 = 0$.

$$y'' - 2x^2 y' + 4xy = x^2 + 2x + 2$$

- انتهت المحاضرة -