« المحاضرة الثامنة »

2-4 - حلقة الباقي (القسمة) ، ومبرهنات التماثل :

4-2-1- تعريف :

- لتكن R حلقة ، $I \trianglelefteq R$ .. نعرف علاقة التكافؤ بالشكل :

$$a, b \in R : a \sim b \Leftrightarrow a - b \in I$$

- نعرف صف التكافؤ للعنصر a بالشكل :

$$\begin{aligned}\{a\} &= \{b \in R : a \sim b\} = \{b \in R : a - b \in I\} \\ &= \{b \in R : -x = a - b \; ; x \in I\} \\ &= \{b \in R : b = a + x : x \in I\} \\ &= \{a + x \in R : x \in I\} = a + I = \bar{a}\end{aligned}$$

- كما أننا نرمز لمجموعة كل صفوف التكافؤ « R/I » .. و ولنعرف قانوني التشكيل :

$$\forall a + I, b + I \in R/I \; ;$$

$$* - \; (a + I) + (b + I) = (a + b) + I$$

$$** - \; (a + I) \cdot (b + I) = (a \cdot b) + I$$

عندئذٍ : تكون $(R/I, +, \cdot)$ حلقة ..

وندعوها حلقة الباقي (القسمة) .

* - ملاحظات :

1 - إذا كانت R تبديلية ، فإن : R/I تبديلية .

2 - إذا كانت R واحدية ، فإن : R/I واحدية .. ويكون واحدها هو « $1 + I$ » .

- أمثلة :

$R = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ، $I = 4\mathbb{Z} \trianglelefteq R$ ..

$$I = 4\mathbb{Z} = \{0, \mp 4, \mp 8, \dots\}$$

$$\Rightarrow R/I = \{I, 1+I, 2+I, 3+I\}$$
$$= \{r+I : r \in R\}$$

- على سبيل المثال -

$$27+I = (24+3).I = (24+I)+(3+I)$$
$$= I + (3+I)$$
$$= (3+I)$$

2-2-4 - مبرهنة :

- لتكن R حلقة و $\emptyset \neq I \subseteq R$ .. عندئذٍ :

$I \trianglelefteq R \Leftrightarrow I$ نواة لتشاكل حلقي .

«الاثبات» - «$\Leftarrow$»

- لنعرف التطبيق « تشاكل الغمر القانوني / التشاكل الطبيعي »

$$\pi : R \longrightarrow R/I$$

بالشكل : $\pi(r) = r + I$

* - واضح أنه تشاكل ،

$$\forall x \in \ker(\pi) \Leftrightarrow \pi(x) = x + I = I$$
$$\Leftrightarrow x \in I$$
$$\Rightarrow I = \ker(\pi) \quad . \quad \#$$

((⇒))

- لتكن : $\varphi: R \to R'$ .. تشاكل حلقي ، ولتكن $I = Ker(\varphi)$ ..

عندئذٍ :

- من الفرض : $\emptyset \neq I \subseteq R$

$$*- \forall x, y \in I = Ker(\varphi) : \varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y) = 0 - 0 = 0$$

$$\Rightarrow x - y \in Ker(\varphi) = I$$

$$**- \forall r \in R, \forall x \in I ; \varphi(r.x) = \varphi(r).\varphi(x) = \varphi(r).0 = 0$$

$$\Rightarrow r.x \in Ker(\varphi) = I$$

$\Leftarrow \quad I \trianglelefteq R \quad .. \quad \#$

4-2-3- ((مبرهنة التماثل الأساسية)) ..

- لتكن لدينا : (($\varphi: R \to R'$)) تشاكل حلقي ،

عندئذٍ القضايا الآتية صحيحة :

$\boxed{1}$ - $R/ker(\varphi) \cong Im(\varphi)$

$\boxed{2}$ - إذا كان φ غامر ، فإن : $R/ker(\varphi) \cong R'$

«الاثبات» _II_ لنعرف العلاقة :

$$g : R/\ker(\varphi) \longrightarrow Im(\varphi)$$

بالشكل الآتي : "لنعتبر «$I = \ker(\varphi)$»"

$$\forall (r+I) \in R/I \quad ; \quad g(r+I) = \varphi(r)$$

* - g تطبيق متباين لأن :

$$\forall r_1+I \wedge r_2+I \in R/I : r_1+I = r_2+I \Leftrightarrow$$

$$r_1 - r_2 \in I \Leftrightarrow \varphi(r_1 - r_2) = 0 \Leftrightarrow \varphi(r_1) = \varphi(r_2)$$

$$\Leftrightarrow g(r_1+I) = g(r_2+I) \quad \#$$

** - g تشاكل حلقي لأن :

$$\forall r_1+I \wedge r_2+I \in R/I ;$$

1). $g((r_1+I)+(r_2+I)) = g((r_1+r_2)+I)$

$$= \varphi(r_1+r_2) = \varphi(r_1) + \varphi(r_2) = g(r_1+I) + g(r_2+I)$$

2). $g((r_1+I).(r_2+I)) = g((r_1.r_2)+I)$

$$= \varphi(r_1.r_2) = \varphi(r_1).\varphi(r_2) = g(r_1+I).g(r_2+I)$$

\#

*** - g غامر لأن :

$$\forall y \in Im(\varphi) = \{\varphi(r) \in S : r \in R\} ;$$

$$\exists r \in R : y = \varphi(r) = g(r+I)$$

$\forall y \in Im(\varphi) : \exists r+I \in R/I \; ; \; g(r+I) = y$

#

مما سبق وتماثل أي أن :

$R/\ker(\varphi) \cong Im(\varphi)$

#

$\boxed{2}$ -

φ غامر $\Leftarrow S' = Im(\varphi)$

«وحسب $\boxed{1}$» يكون :

$R/\ker(\varphi) \cong S'$

#

4.2.4 - مبرهنة :

- ليكن : $\varphi : R \to S'$ تشاكل حلقي ، $I \trianglelefteq R \wedge J \trianglelefteq S'$

عندئذٍ فإن :

$\boxed{1}$ - $\varphi^{-1}(J) \trianglelefteq R$

$\boxed{2}$ - $\varphi^{-1}(J)/\ker(\varphi) \cong J$

$\boxed{3}$ - $\varphi(I) \trianglelefteq S'$

«الإثبات» - وظيفة -

Subject:

«تعريف»
- لتكن R حلقة و $S \leq R$ و $I \trianglelefteq R$. عندئذٍ

[1] - $I \cap S \trianglelefteq S$

[2] - $I \leq S \Leftarrow I \leq S \leq R$

«الإثبات» - مطلوب -

4-2-5 - مبرهنة :
- لتكن R حلقة ، و $I, J \trianglelefteq R$ عندئذٍ :

[1] - $I/I \cap J \cong I+J/J$

[2] - $\underline{J \subseteq I} : \; R/J / I/J \cong R/I$

«الإثبات»
$I/J \trianglelefteq R/J \wedge I \cap J \trianglelefteq I \wedge J \trianglelefteq I+J$

[1] - لنعرف العلاقة : $\varphi : I \longrightarrow I+J/J$ .. بالشكل :

$\forall x \in I \; ; \; \varphi(x) = x + J$

* - φ تطبيق متباين لأن :

$if \; x = y \Leftrightarrow x + J = y + J \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$

**- φ تشاكل حلقي لأن :

1)- $\varphi(x+y) = (x+y)+J = (x+J)+(y+J)$

$= \varphi(x) + \varphi(y)$

2)- $\varphi(x.y) = (x.y)+J = (x+J).(y+J)$

$= \varphi(x) . \varphi(y)$

*** - φ غامر لأن :

$\forall x+J \in I+J/J$: $x \in I+J \Rightarrow$

$\exists a \in I, b \in J : x = a+b \Rightarrow a = x-b$

$\wedge$ $a+J = (x-b)+J = (x+J)-(b+J)$

$= (x+J)+J = x+J$

$\Rightarrow \forall x+J \in I+J/J$; $\exists a \in I$:

$\varphi(a) = a+J = x+J$

مما سبق و حسب المبرهنة الأساسية في التشاكل نجد أن :

$I / Ker(\varphi) \simeq I+J/J$

« لنثبت الآن أن : $Ker(\varphi) = I \cap J$ »..

Subject: / /

إنّ :

$$Ker(\varphi) = \{x \in I : \varphi(x) = J\}$$

$$= \{x \in I : x + J = J\}$$

$$= \{x \in I : x \in J\} = I \cap J$$

$$\Rightarrow I / I \cap J \cong I + J / J$$

#

12 - لنعرف العلاقة : $g : R/J \to R/I$ .. بالشكل :

$$\forall (r + J) \in R/J : g(r + J) = r + I$$

*) - g تطبيق متباين لأن :

$$\text{if } r_1 + J = r_2 + J \Rightarrow r_1 - r_2 \in J \subseteq I \Rightarrow r_1 - r_2 \in I$$

$$\Rightarrow r_1 + I = r_2 + I \Rightarrow g(r_1 + J) = g(r_2 + J)$$

**) - g تشاكل حلقي لأن :

1)- $g((r_1 + J) + (r_2 + J)) = g((r_1 + r_2) + J)$

$$= (r_1 + r_2) + I = (r_1 + I) + (r_2 + I)$$

$$= g(r_1 + J) + g(r_2 + J)$$

2)- $g((r_1+J)\cdot(r_2+J)) = g((r_1\cdot r_2)+J)$

$= (r_1\cdot r_2)+I = (r_1+I)\cdot(r_2+I)$

$= g(r_1+I)\cdot g(r_2+I)$

***)- g غامر لأن :

$\forall\, r+I \in R/I \Rightarrow r \in R \Rightarrow r+J \in R/J$ و

$\exists\, r+J \in R/J : g(r+J) = r+I$

مما سبق ، حسب مبرهنة التماثل الأساسية ..

$R/J/\ker(g) \simeq R/I$

- من جهة أولى :

$\forall\, r+J \in \ker(g) \Rightarrow g(r+J) = I$

$\Rightarrow r+I = I \Rightarrow r \in I \Rightarrow r+J \in I/J$

$\Rightarrow \ker(g) \subseteq I/J$

- من جهة ثانية :

$\forall\, r+J \in I/J \Rightarrow r \in I \Rightarrow r+I = I$

$\Rightarrow g(r+J) = I \Rightarrow r+J \in \ker(g)$

Subject: / /

$$\Rightarrow I/J \subseteq \ker(g)$$

$$\Rightarrow I/J = \ker(g)$$

$$\Rightarrow R/J \big/ I/J \cong R/I$$

#

#