/ /

- المحاضرة السادسة -

- حل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية وبأمثال متغيرة بجوار النقطة الشاذة النظامية: $\boxed{1}$ --- $(x-x_0)^2 y'' + (x-x_0).P(x).y' + q(x)\, y = 0$

- مبرهنة الوجود (الوحدانية):

بفرض أن x_0 نقطة شاذة نظامية للمعادلة التفاضلية $\boxed{1}$ عندئذٍ يوجد حل واحد على الأقل للمعادلة بجوار x_0 يكون قابلاً للنشر على شكل متسلسلة

$$y = (x-x_0)^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^n \ ; \ C_0 \neq 0$$

وتكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ متقاربة في المجال $|x-x_0| < R$

* طريقة حل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية بأمثال متغيرة:

1). نبحث عن الحل العام من الشكل $y = (x-x_0)^{\lambda} \sum_{n=0} c_n (x-x_0)^n$

وسنفرض أن $x_0 = 0$ للسهولة ويصبح عندئذٍ الحل من الشكل:

$$y = x^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} c_n . x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n . x^{n+\lambda}$$

2). نوجد المشتق الأول والمشتق الثاني ونعوض في المعادلة التفاضلية ومن ثم نوجد قوى السلاسل الناتجة ونوحّد حدودها الدنيا ونحصل على العلاقة التكرارية (التراجعية).

3). نوجد المعادلة المميزة:

$$\lambda(\lambda-1) + P(0).\lambda + q(0) = 0$$

وهي تمثل أمثال الحد الأول للمتسلسلة الناتجة وهي من الدرجة الثانية بالنسبة لـ x ونوجد جذرا المعادلة $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$

4)- نعوض قيمة الجذر الأكبر في العلاقة التكرارية فيكون الحل الخاص الأول هو:

$$y_1 = |x|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n . x^n$$

5). نوجد الحل الخاص الثاني وذلك حسب الحالات التالية:

(a) $\lambda_1 - \lambda_2$ ليس عدداً صحيحاً فيكون الحل الخاص الثاني بتعويض λ_2 (الصغرى) بالعلاقة التكرارية:

$$y_2 = |x|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} \overline{c_n}\, x^n$$

موزاييك

(b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ «جذر مضاعف».

عندئذٍ يكون الحل الخاص الثاني:

$$y_2 = |x|^{\lambda_2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \overline{c}_n \cdot x^n + y_1 \ln|x|$$

(c). $\lambda_1 - \lambda_2$ هو عدد صحيح عندئذٍ يكون الحل الخاص الثاني هو:

$$y_2 = |x|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} \overline{c}_n x^n + a y_1 \ln|x|$$

وفي الحالات السابقة يكون الحل العام هو تركيب ~~الحلول~~ للحلين الخاصين:

$$y = A y_1 + B y_2$$

تمارين: باستخدام متسلسلات القوى أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية بجوار $x_0 = 0$.

1). $x^2 \cdot y'' - (x+2) y = 0$

2). $2x^2 y'' + (x-3)^2 y' - y = 0$

3). $4x \cdot y'' + 2y' + y = 0$

حل (3). لنأخذ الشكل التالي للمعادلة:

$$P_0(x) \cdot y'' + P_1(x) y' + P_2(x) y = 0$$

$$x \cdot \frac{P_1}{P_0} = x \cdot \frac{2}{4x} = \frac{1}{2} \quad ، \quad x^2 \cdot \frac{P_2}{P_0} = x^2 \cdot \frac{1}{4x} = \frac{x}{4}$$

وبما أن الدالتين تحليليتين فإن: $x_0 = 0$ نقطة شاذة نظامية نوجد المعادلة المميزة:

$$0 = \lambda(\lambda - 1) + P(0) \cdot \lambda + q(0)$$

- انتهت المحاضرة السادسة -

موزاييك