ملاحظة: إنّ عدد حلول المعادلة:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k \quad ; \quad (1 \leq k \leq n)$$

في $\{0,1\}$ يساوي عدد طرق توزيع k كرة في n صندوق بشرط أنّ كل صندوق يحوي كرة على الأكثر.

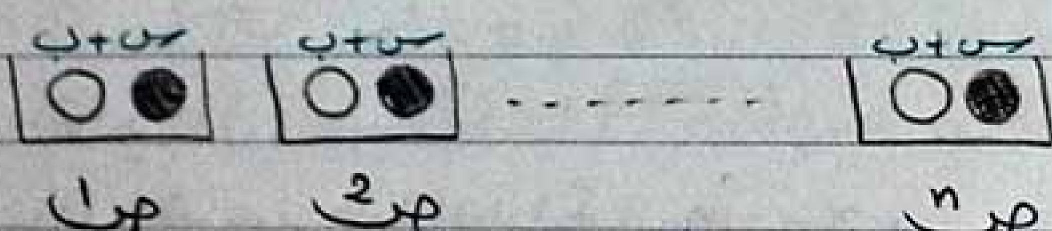
(وظيفة) تمرين: باستخدام منشور الكرجي-نيوتن أثبت أنّ:

I) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$ $\quad (a=1, b=1)$

II) $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$ $\quad (a=1, b=-1)$

تمرين: لدينا n صندوق كل منها يحوي كرة بيضاء وكرة سوداء نسحب من كل صندوق كرة واحدة والمطلوب:
بكم طريقة يمكن الحصول على k كرة بيضاء و $(n-k)$ كرة سوداء ؟؟

الحل:



نختار k صندوق من بين n صندوق وذلك يتم بـ $\binom{n}{k}$ طريقة ومن ثم نختار من هذه الـ k صندوق كرة بيضاء من كل صندوق منها و $(n-k)$ كرة سوداء من $(n-k)$ الصناديق المتبقية وذلك يتم بطريقة واحدة وبالتالي حلول المسألة حسب المبدأ الأساسي في العد هو: $\binom{n}{k}$ طريقة

تمرين: أثبت منشور الكرجي-نيوتن:

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a,b \in \mathbb{R}:$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

الحل: بالاستعانة بالتمرين السابق:

$(a+b)^n = \underbrace{(a+b).(a+b).......(a+b)}_{n \text{ مرة}} = ... + \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + ...$

إنّ أمثال $a^k b^{n-k}$ في $(a+b)^n$ هو عدد طرق الحصول على a مكرر k مكررة و b مكرر $n-k$ مرة أثناء عملية سحب عنصر واحد (a أو b) من كل قوس $(a+b)$ من بين n قوس وحسب التمرين السابق هو $\binom{n}{k}$

تمرين: لدينا n نقطة في المستوي لا تقع أي ثلاث منها على استقامة واحدة و المطلوب:

1) ما هو عدد المستقيمات المارة بنقطتين من نقاط المجموعة؟

الحل: إنّ عدد هذه المستقيمات يساوي عدد طرق اختيار نقطتين من بين n نقطة ويساوي: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ مستقيم.

2) ما هو عدد المثلثات التي يمكن تشكيلها بحيث تكون رؤوسها من نقاط المجموعة؟

الحل: إنّ عدد هذه المثلثات هو عدد طرق اختيار 3 نقاط من بين n نقطة ويساوي $\binom{n}{3}$ مثلث.

تمرين: بفرض $r, s, t \in \mathbb{N}$ حيث $n=r+s+t$ والمطلوب: بكم طريقة يمكن توزيع r كرة حمراء و s كرة بيضاء و t كرة سوداء على n صندوق بحيث كل صندوق يحوي كرة واحدة فقط.

الحل: حالة خاصة: لو كانت الكرات متمايزة لكان عدد الطرق $= n!$

نختار r صندوق من بين n صندوق وذلك يتم بـ $\binom{n}{r}$ طريقة ومن ثمّ نضع في كل صندوق (التي عددها r) كرة حمراء واحدة وذلك يتم بطريقة واحدة.

لنوزع s كرة بيضاء و t كرة سوداء على $n-r=s+t$ صندوق المتبقية.

نختار s صندوق من بين $s+t=n-r$ صندوق وذلك يتم بـ $\binom{s+t}{s}$ طريقة ومن ثم نضع في كل صندوق كرة بيضاء واحدة وذلك يتم بطريقة واحدة.

وأخيراً نضع t كرة سوداء في t صندوق المتبقية و ذلك يتم بطريقة واحدة.

فيكون حسب المبدأ الأساسي في العد:

إن عدد طرق توزيع r كرة حمراء و s بيضاء و t سوداء على $n=s+r+t$ صندوق (بحيث كل صندوق يحوي كرة واحدة فقط) هو:

$$\binom{n=r+s+t}{r}\cdot\binom{s+t}{s}\cdot 1=\frac{(r+s+t)!}{r!\cdot s!\cdot t!}$$

قاعدة (تعميم):

بفرض لدينا n شيء مقسمين إلى k نوع بحيث عدد الأشياء من النوع k هو m_k (وبالتالي $n=m_1+\ldots\ldots+m_k$) عندئذٍ فإن عدد طرق توزيع هذه الأشياء التي عددها n في n مكان (بحيث شيء واحد في كل مكان) هو:

$$\frac{(m_1+m_2+m_3+\cdots+m_k)!}{m_1!\cdot m_2!\cdot\ldots\ldots\cdot m_k!}$$

تمارين:

I) أثبت أنه: $\forall\ 1\leq k\leq m,n$ فإن:

$$\binom{m+n}{k}=\binom{m}{0}\binom{n}{k}+\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}+\cdots+\binom{m}{k-1}\binom{n}{1}+\binom{m}{k}\binom{n}{0}$$

II) أوجد عدد عناصر كل من المجموعتين التاليتين:

1) $\{(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)\in\mathbb{N}^n : 1\leq x_1<\ldots\ldots<x_n\leq m\}$

2) $\{(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)\in\mathbb{N}^n : 1\leq x_1\leq x_2\leq\ldots\ldots\leq x_n\leq m\}$

III) أوجد عدد التوابع $f:[m]\longrightarrow[n]$ في الحالتين:

1) f متزايد.

2) f متزايد تماماً.