المحاضرة الثالثة:

حل المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية بأمثال متغيرة:

- نظرية الوجود أو الوحدانية:

إذا كانت الدالتان $q(x)$, $P(x)$ تحليليتان في المعادلة:

$$y'' + P(x).y' + q(x).y = 0 \quad \text{---- (1)}$$

في النقطة x_0 و أن نشرهما بمتسلسلة تايلور في قوى لـ: $(x-x_0)$ متقاربان في المجال: $|x-x_0| < R$.

عندئذٍ هنالك حلان مستقلان للمعادلة (1) كل منهما على شكل متسلسلة تايلور في قوى لـ $(x-x_0)$ متقاربة في مجال ضمن المجال R.

لإيجاد حل المعادلة التفاضلية (1) نتبع الخطوات التالية:

1). نبحث عن الحل العام على شكل متسلسلة لقوى $(x-x_0)$ من الشكل:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$$

2). نوجد المشتق الأول و الثاني لشكل الحل العام ثم نعوض في المعادلة (1).

3). نوحد قوى المتسلسلات الناتجة.

4). نوحد الحدود الدنيا للمتسلسلات الناتجة.

5). بالمطابقة نحصل على علاقة تكرارية للحل العام.

6). نحسب جميع الثوابت بدلالة c_0, c_1 ثم نخرج c_0 عامل مشترك و c_1 عامل مشترك فنحصل على الحلين الخاصين.

7). يكون الحل العام هو التركيب الخطي للحلين الخاصين.

مثال:

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية بجوار $x_0=0$

$$y'' + x.y' + (x^2+2).y = 0$$

الحل:

- النقطة $x_0=0$ نقطة عادية للمعادلة لذلك نبحث عن الحل العام من الشكل:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} c_n . x^n$$

$$y=c_0+c_1.x+c_2.x^2+\dots+c_n.x^n+\dots$$

$$y'=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\dots+nc_nx^{n-1}+\dots$$

$$\Rightarrow y'=\sum_{n=1}^{\infty} n.c_n.x^{n-1}$$

$$y''=2c_2+6c_3x+12c_4.x^2+\dots+n(n-1)c_nx^{n-2}+\dots$$

$$\Rightarrow y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n.x^{n-2}$$

- نعوض y' و y'' في المعادلة المعطاة:

$$y''+x.y'+(x^2+2)y=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n.x^{n-2}+x.\sum_{n=1}^{\infty} n.c_n.x^{n-1}+(x^2+2)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1)c_n.x^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty} n.c_n.x^n+\sum_{n=0}^{\infty} c_n.x^{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty} 2.c_n x^n=0$$

- نبدل في المتسلسلة الأولى كل (n) بـ $(n+2)$ وفي المتسلسلة الثانية كل (n) بـ $(n-2)$:

$$\sum_{n+2=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}.x^{n+2-2}+\sum_{n=1}^{\infty} n.c_n x^n+\sum_{n-2=0}^{\infty} c_{n-2}.x^{n+2-2}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty} 2.c_n x^n=0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty} n.c_n x^n+\sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}.x^n+\sum_{n=0}^{\infty} 2.c_n x^n=0$$

- نجعل الحدود الدنيا للمتسلسلات متساوية أي $\boxed{2}$ ولتوحيد الحدود الدنيا نوجد أول حدين للمتسلسلة الأولى من أجل $n=0$ و 1 والحد الثاني للمتسلسلة الثانية من أجل $n=1$ وأول حدين

للمتسلسلة الأخيرة من أجل $n=0,1$ فتصبح المعادلة على الشكل:

$$2\cdot C_2 + 2(3)C_3 x + C_1 x + 2C_0 + 2C_1 x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)(n+2)C_{n+2}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n\cdot C_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} C_{n-2}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 2\cdot C_n x^n = 0$$

$$2C_2 + 2C_0 + 6C_3 x + 3C_1 x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)C_{n+2} + n\cdot C_n + C_{n-2} + 2C_n\right]x^n = 0$$

$$2C_2 + 2C_0 + (6C_3 + 3C_1)x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)C_{n+2} + (n+2)C_n + C_{n-2}\right]x^n = 0$$

بالمطابقة نجد:

$$2C_2 + 2C_0 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_0$$

$$6C_3 + 3C_1 = 0 \Rightarrow 6C_3 = -3C_1 \Rightarrow C_3 = -\frac{C_1}{2}$$

$$(n+1)(n+2)C_{n+2} + (n+2)C_n + C_{n-2} = 0$$

$$\Rightarrow C_{n+2} = -\frac{(n+2)C_n + C_{n-2}}{(n+1)(n+2)} \; ; n \geq 2$$

وهي العلاقة التكرارية.

$$n=2 \Rightarrow C_4 = -\frac{4C_2 + C_0}{3\cdot 4} = -\frac{-4C_0 + C_0}{3\cdot 4} = \frac{C_0}{4}$$

$$n=3 \Rightarrow C_5 = -\frac{5C_3 + C_1}{4\cdot 5} = -\frac{5\left(-\frac{C_1}{2}\right) + C_1}{20} = \frac{\frac{3C_1}{2}}{20}$$

$$C_5 = \frac{3C_1}{2\cdot 20} = \frac{3C_1}{40}$$

نعوض الثوابت في الحل العام:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\cdot x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots + C_n x^n + \dots$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_n x^n + \dots$$

$$y = c_0 + c_1 x - c_0 x^2 - \frac{c_1}{2} x^3 + \frac{c_0}{4} x^4 + \frac{3c_1}{40} x^5 + \dots + c_n x^n$$

$$\Rightarrow y = c_0\underbrace{\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{4} + \dots\right)}_{\text{الحل الخاص الأول}} + c_1\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{3x^5}{20} + \dots\right)}_{\text{الحل الخاص الثاني}}$$

والحل العام هو التركيب الخطي للحلين الخاصين.

مثال (2):

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية في جوار $x_0 = 0$

$$(x-1)y'' - x y' + y = 0$$

الحل:

النقطة $x_0 = 0$ نقطة عادية للمعادلة لذلك نبحث عن الحل العام من الشكل:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

نعوض y' و y'' في المعادلة المعطاة فنجد:

$$(x-1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

نوحد قوى المتسلسلات الناتجة وذلك بتبديل كل n بـ $n+1$ في المتسلسلة الأولى وتبديل كل n بـ $n+2$ في المتسلسلة الثانية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) C_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) C_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^n$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

نوحد الحدود الدنيا للمتسلسلات الناتجة:

$$-2C_2 + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[n(n+1) C_{n+1} - (n+1)(n+2) C_{n+2} - nC_n + C_n \right] x^n = 0$$

- بالمطابقة نجد:

$$-2C_2 + C_0 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{C_0}{2}$$

$$n(n+1) C_{n+1} - (n+1)(n+2) C_{n+2} + (1-n) C_n = 0$$

$$C_{n+2} = \frac{n(n+1) C_{n+1} + (1-n) C_n}{(n+1)(n+2)} \; ; \; n \geq 1$$

ونسميها العلاقة التكرارية.

$$n=1 \Rightarrow C_3 = \frac{1(2) C_2 + 0}{2 \cdot 3} = \frac{2C_2}{6} = \frac{C_2}{3} = \frac{C_0}{2 \cdot 3} = \frac{C_0}{3!}$$

$$n=2 \Rightarrow C_4 = \frac{2(3) C_3 - C_2}{3 \cdot 4} = \frac{2(3) \frac{C_0}{3!} - \frac{C_0}{2}}{3 \cdot 4}$$

$$\Rightarrow C_4 = \frac{C_0}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{C_0}{4!}$$

$$n=3 \Rightarrow C_5 = \frac{3(4) C_4 - 2C_3}{4 \cdot 5} = \frac{C_0}{5!}$$

نعوض الثوابت في الحل العام:

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots + C_n x^n + \cdots$$

$$\Rightarrow y = C_0 + C_1 x + \frac{C_0}{2!} x^2 + \frac{C_0}{3!} x^3 + \frac{C_0}{4!} x^4 + \frac{C_0}{5!} x^5 + \cdots + C_n x^n$$

$$\Rightarrow y = C_1 x + C_0 \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \right)$$

نعلم أنّ:

نعلم أنّ:

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \cdots$$

وبذلك يكون:

$$y = c_1 x + c_0(e^{x} - x) = c_1 x + c_0 e^{x} - c_0 x$$

$$\boxed{y = (c_1 - c_0)x + c_0 e^{x}}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

- انتهت المحاضرة -