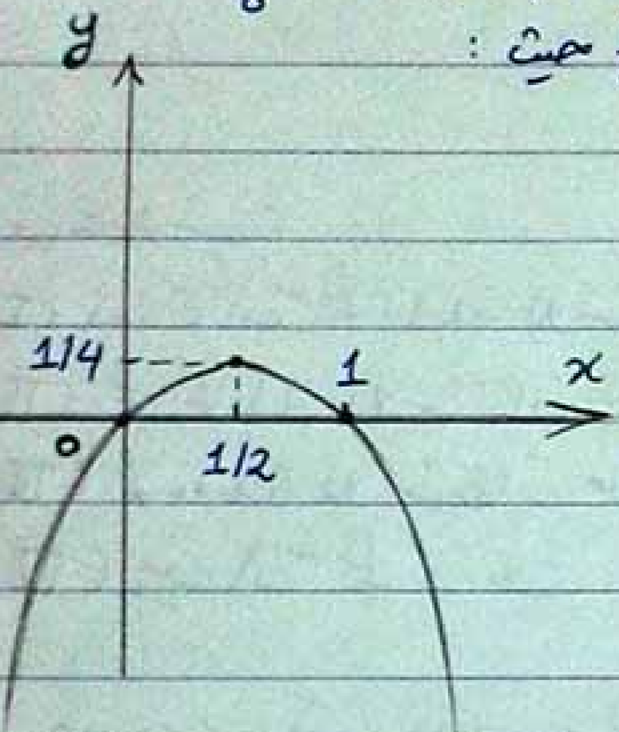
الموضوع: حل تمارين د.ت.م.

مثال (1): لتكن لدينا الدالة $f(x) = x - x^2$

بين أن f د.ت.م على $[0,1]$ و $[1,5]$ ثم أوجد $\overset{5}{\underset{0}{V}} f$

الحل: نلاحظ أن $f = f_1 - f_2$ حيث:



$f_1 = x$ وهي دالة متزايدة على $[0,1]$

$f_2 = x^2$ " " على $[0,1]$

إذاً f دالة كتبت على شكل فرق لدالتين متزايدتين على المجال $[0,1]$

وبالتالي (حسب معيار) f د.ت.م

وبنفس الطريقة نجد على المجال $[1,5]$.

$$\overset{5}{\underset{0}{V}} f = \overset{1}{\underset{0}{V}} f + \overset{5}{\underset{1}{V}} f$$

$$= \overset{1/2}{\underset{0}{V}} f + \overset{1}{\underset{1/2}{V}} f + \overset{5}{\underset{1}{V}} f$$

$$= \left|f(\tfrac{1}{2}) - f(0)\right| + \left|f(1) - f(\tfrac{1}{2})\right| + \left|f(5) - f(1)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{4} - 0\right| + \left|0 - \frac{1}{4}\right| + \left|-20 - 0\right| = 20 \cdot \frac{1}{2} = \frac{41}{2}$$

طريقة ثانية: $f'(x) = 1 - 2x$

$|f'(x)| = |1 - 2x| \leq |1| + |2x| = 3$; $x \in [0,1]$

$|f'(x)| = |1 - 2x| \leq |1| + |2x| = 11$; $x \in [1,5]$

$\Leftarrow$ f د.ت.م.

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f = \int_0^1 |1 - 2x|\, dx$$

$$\overset{5}{\underset{1}{V}} f = \int_1^5 |1 - 2x|\, dx$$

مثال (2): بين أن الدالة $f(x)=x^2-\frac{1}{1+x}$ هي د.ت.م على $[0,1]$ ثم أوجد $\overset{1}{\underset{0}{V}} f$

الحل: نكتب $f(x)$ بالشكل:

$$f(x)=x^2+\left(\frac{-1}{x+1}\right)$$

نلاحظ أن $f_1(x)=x^2$ متزايدة على $[0,1]$

و $f_2(x)=\frac{-1}{x+1}$ دالة متزايدة على $[0,1]$ وبالتالي $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$

دالة متزايدة وبما أن f دالة متزايدة فهي د.ت.م على $[0,1]$، كما أن:

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f=|f(1)-f(0)|=\left|1-\frac{1}{2}-(0-1)\right|=\frac{3}{2}$$

مثال (3) لتكن لدينا الدالة $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ والمطلوب بين فيما إذا

كانت f دالة ذات تغير محدود على $[2,+\infty[$ ثم أوجد التغير الكلي

الحل: لنثبت أن f د.ت.م على $[2,A]$ ثم لنبرهن أن:

$$\overset{\infty}{\underset{2}{V}}=\lim_{A>2}\overset{A}{\underset{2}{V}} f$$

$$f'(x)=-\frac{2(x+1)}{(x+1)^4}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow -2(x+1)=0$$

$$\Rightarrow x+1=0\Rightarrow \boxed{x=-1}$$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
دراسة إشارة $f'(x)$		$+$	0			$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\|$		$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

نلاحظ أن التابع متناقص في المجال $[2,+\infty[$ إذاً التابع مطرد في هذا المجال وبالتالي

f د.ت.م على $[2,+\infty[$، كما أن:

$$\overset{\infty}{\underset{2}{V}} f = \lim_{A \to \infty} \overset{A}{\underset{2}{V}} f = \lim_{A \to \infty} \left| f(A) - f(2) \right|$$

$$= \lim_{A \to \infty} \left| \frac{1}{(1+A)^2} - \frac{1}{(2+1)^2} \right| = \left| 0 - \frac{1}{9} \right| = \frac{1}{9}$$

مثال (4) : لتكن لدينا الدالة :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

المطلوب : بين أن التابع الحل دالة ذات تغير محدود على المجال $[0, b]$

الحل :

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right)$$

$$= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

$$|f'(x)| = \left| 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right| \leqslant \left| 2x \sin \frac{1}{x} \right| + \left| \cos \frac{1}{x} \right|$$

$$\leqslant 2|b| + 1$$

إذاً f د.ت.م على $[a, b]$

مثال (5) : لتكن لدينا الدالة f المعرفة على المجال $[0, \frac{1}{2}]$ بالشكل التالي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{\ln x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

المطلوب :

1) بين أن الدالة f مستمرة على $[0, \frac{1}{2}]$.

2) بين أن f دالة متزايدة على $[0, \frac{1}{2}]$

3) هل f دالة ذات تغير محدود ولماذا؟ ثم أوجد $\overset{\frac{1}{2}}{\underset{0}{V}} f$

$$\overset{\infty}{\underset{2}{V}} f = \lim_{A \to \infty} \overset{A}{\underset{2}{V}} f = \lim_{A \to \infty} |f(A) - f(2)|$$

$$= \lim_{A \to \infty} \left| \frac{1}{(1+A)^2} - \frac{1}{(2+1)^2} \right| = \left| 0 - \frac{1}{9} \right| = \frac{1}{9}$$

مثال (4) : لتكن لدينا الدالة :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

المطلوب : بين أن التابع يمثل دالة ذات تغير محدود على المجال $[0, b]$

الحل :

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right)$$

$$= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

$$|f'(x)| = \left| 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right| \leqslant \left| 2x \sin \frac{1}{x} \right| + \left| \cos \frac{1}{x} \right|$$

$$\leqslant 2|b| + 1$$

إذاً f د.ت.م على $[a, b]$

مثال (5) : لتكن لدينا الدالة f المعرفة على المجال $[0, \frac{1}{2}]$ بالشكل التالي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{\ln x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

المطلوب :

1) بين أن الدالة f مستمرة على $[0, \frac{1}{2}]$

2) بين أن f دالة متزايدة على $[0, \frac{1}{2}]$

3) هل f دالة ذات تغير محدود ولماذا؟ ثم أوجد $\overset{1/2}{\underset{0}{V}} f$

$$\overset{\frac{1}{2}}{\underset{0}{V}} f = \left| f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) \right| = \frac{1}{\ln 2}$$

DABBAGH STATIONERY