المحاضرة الثامنة:

الفصل الثاني: تحويلات لابلاس وتطبيقاتها في حل المعادلات التفاضلية الخطية:

نسمي بالتعريف التكامل التالي:

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t).e^{-st}.dt$$

بتحويل لابلاس للدالة $f(t)$ حيث: $t \geq 0$, $s > 0$.

- نقول إن الدالة $f(t)$ من مرتبة أسية، إذا كان T عدد كبير بشكل كافٍ: $T < t$ فيوجد عددان a , M يحققان:

$$|f(t)| < M.e^{at}$$

* مبرهنة:

إذا كانت الدالة $f(t)$ مستمرة قطعياً في المجال $]0, \infty[$ وإذا كانت الدالة $f(t)$ أسية فإن تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ موجود.

* إن تحويل لابلاس يحقق الخاصية الخطية أي: $\alpha, \beta \in R$

$$L[\alpha.f(t) + \beta.g(t)] = \alpha.L[f(t)] + \beta.L[g(t)]$$

* جدول تحويلات لابلاس لبعض الدوال الشهيرة (للحفظ):

1). $L[A] = \dfrac{A}{s}$; $A \in R$

2). $L[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a}$; $s > a$, $a \in R$

3). $L[t^n] = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$; $s > 0$, $n \in N$

4). $L[t^p] = \dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$; $s > 0, p \in R, p > -1$

وحيث أنّ: $\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} t^p.e^{-st}.dt$

5). $L[\sin at] = \frac{a}{s^2+a^2}$; $s > 0$

6). $L[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}$; $s > 0$

7). $L[\operatorname{Sh} at] = \frac{a}{s^2-a^2}$; $s > a$

8). $L[\operatorname{Ch} at] = \frac{s}{s^2-a^2}$; $s > a$

9). • $L[f'(t)] = s \cdot F(s) - f(0)$

• $L[f''(t)] = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$.

10). • $L\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right] = s \cdot F(x,s) - f(x,0)$

• $L\left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right] = s^2 F(x,s) - s \cdot f(x,0) - f'(x,0)$

11). $L\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial F(x,s)}{\partial x}$, $L\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial^2 F(x,s)}{\partial x^2}$

12). $L[t^n \cdot f(t)] = (-1)^n \cdot \frac{\partial^n \cdot F(s)}{\partial s^n}$

13). $L[e^{at} \cdot f(t)] = F(s-a)$; $s > a$

أمثلة: أوجد تحويل لابلاس لكل ما يلي:

1). $L[3.e^{-4t}] = 3L[e^{-4t}] = 3 \cdot \frac{1}{s+4}$

2). $L[2t^2] = 2L[t^2] = 2 \cdot \frac{2!}{s^3} = \frac{4}{s^3}$

3). $L[4.\cos 3t] = 4L[\cos 3t] = 4 \cdot \frac{s}{s^2+9}$

4). $L[\sin \pi t] = \frac{\pi}{s^2+\pi^2}$

5). $L[e^{3t}.\sin 4t]$, $L[\sin 4t] = \frac{4}{s^2+16} = F(s)$

$\Rightarrow L[e^{3t}.\sin 4t] = F(s-3) = \frac{4}{(s-3)^2+16}$

6). $L[t^2.e^{-2t}]$, $L[t^2] = \frac{2}{s^3} = F(s)$

$\Rightarrow L[t^2.e^{-2t}] = F(s+2) = \frac{2}{(s+2)^3}$

7). $L[t.\sin 2t]$, $L[\sin 2t] = \frac{2}{s^2+4} = F(s)$

$\Rightarrow L[t.\sin 2t] = (-1).\frac{d F(s)}{d s} = - \frac{-4s}{(s^2+4)^2} = \frac{4s}{(s^2+4)^2}$

8). $L[t^2.\sin 2t]$, $L[\sin 2t] = \frac{2}{s^2+4} = F(s)$

$\Rightarrow L[t^2.\sin 2t] = (-1)^2.\frac{d^2 F(s)}{d s^2} = \frac{d}{ds}\left[\frac{d F(s)}{ds}\right]$

$= \frac{d}{ds}\left(\frac{-4s}{(s^2+4)^2}\right) = \frac{-4}{(s^2+4)^2} + \frac{16}{(s^2+4)^3}$

- انتهت المحاضرة -