المحاضرة السادسة

ملاحظات :

1) من أجل كل عدد حقيقي $a>0$ يوجد $n \in \mathbb{N}^*$ بحيث $a > \frac{1}{n}$

لأن $x_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ وبالتالي

$$\forall a>0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < a$$

2) لا يوجد أي عدد حقيقي $a \in \mathbb{R}^{+*}$ يحقق $\forall n \in \mathbb{N}^* : a < \frac{1}{n}$ } نتج من 1

3) $\{0\} = \bigcap_{n \geq 1} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$ .. نتج من 2 ..

لأنه لو كان $a>0$ ويحقق

$a \in \bigcap_{n \geq 1} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$ فإن

$-\frac{1}{n} < a < \frac{1}{n}$ $(\forall n \geq 1)$ (تناقض مع $\boxed{2}$)

4) التقاطع المنتهي لمجموعات مفتوحة في $\mathbb{R}$ هو مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ ولكن التقاطع غير المنتهي ليس بالضرورة أن يكون مجموعة مفتوحة والمثال على ذلك :

$\bigcap_{n \geq 1} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$ كل مجال هو مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ لكن $\{0\}$ ليس مجموعة مفتوحة

5) لا يوجد مجال مفتوح $]a,b[$ بحيث $]a,b[\subset \mathbb{Q}$ أو $]a,b[\subset \mathbb{Q}^c$

6) $\begin{cases} \mathring{\mathbb{Q}} = \phi \\ (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ = \phi \end{cases}$ ينتج من 5

7) $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})' = \mathbb{R}$

الإثبات: لنفرض جدلاً أنّ $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})' \neq \mathbb{R}$

$\Longrightarrow \exists x \in \mathbb{R} \wedge x \notin (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})'$

$\Longrightarrow \exists r>0 :]x-r, x+r[\cap ((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\setminus\{x\}) = \emptyset$

$\Longrightarrow \exists r>0 :]x-r, x+r[\subset (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\setminus\{x\})^c$

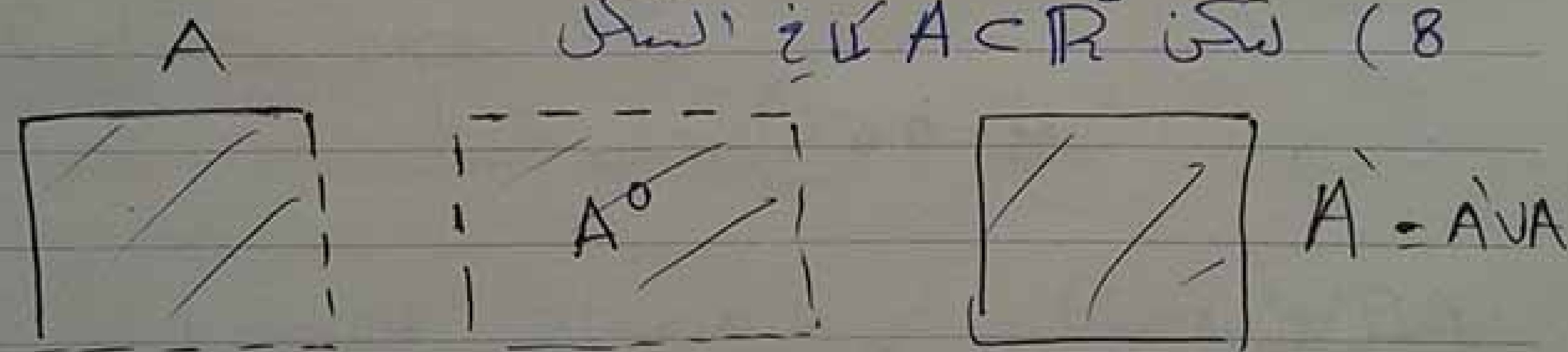
$\Longrightarrow \exists r>0 :]x-r, x+r[\subset (\mathbb{Q}^c \cap \{x\}^c)^c$

$\Longrightarrow \exists r>0 :]x-r, x+r[\subset \mathbb{Q} \cup \{x\}$ تناقض

ومنه الفرض الجدلي خاطئ

تذكرة: $(A\setminus B) = A \cap B^c$

8) لتكن $A \subset \mathbb{R}^2$ كما في الشكل



غير مفتوحة وغير مغلقة — مفتوحة وغير مغلقة — غير مفتوحة، مغلقة

نلاحظ من الرسم أنّ:

* A° هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A
* $A' \cup A$ هي أصغر مجموعة مغلقة تحوي A

انتهى الفصل الأول

الفصل الثاني: الفضاءات التبولوجية العامة

* مجموعة أجزاء مجموعة:

لتكن $X \neq \phi$ سنرمز $P(X)$ لمجموعة كل المجموعات الجزئية من X

مثلاً: $X = \{1, 2, 3\}$ عندئذ

$$P(X) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, X\}$$

بشكل عام $|X| = n \Rightarrow |P(X)| = 2^n$

* تعريف الفضاء التبولوجي:

لتكن $X \neq \phi$ ولتكن $\tau \subset P(X)$ سندعو τ تبولوجيا على X أو (X, τ) فضاء تبولوجي إذا تحققت الشروط التالية

1) $\phi, X \in \tau$

2) $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$

3) $A_i \in \tau \ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau \quad (\forall i \in I)$

ملاحظة: الشرط الثاني من تعريف التبولوجيا يكافئ:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \in \tau$$

تعريف:

إذا كان (X, τ) فضاء تبولوجي، سندعو عناصر τ مجموعات مفتوحة في X بالنسبة للتبولوجيا τ أو مجموعات مفتوحة في الفضاء التبولوجي (X, τ)

أي أنه من أجل كل $B \in X$ فإن:

B مفتوحة بالنسبة لـ $\tau \Leftrightarrow B \in \tau$

مثال: لتكن $X = \{a, b, c\}$ ولتكن

$$\tau_1 = \{\phi, X, \{a\}\}, \quad \tau_2 = \{\phi, X, \{b\}\}$$

$$\tau_3 = \{\phi, X, \{a\}, \{b\}\}$$

إنّ τ_1, τ_2 تبولوجيا على X لأنها حققتا الشروط

لكن τ_3 ليست تبولوجيا على X لأن $\{a\}, \{b\} \in \tau_3$ لكن

$$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \tau_3$$

نتيجة: ① إذا كان τ_1, τ_2 تبولوجيا على X فإن $\tau_1 \cap \tau_2$ يكون تبولوجيا على X

الإثبات:

(1) $\phi, X \in \tau_1, \tau_2 \Rightarrow \phi, X \in \tau_1 \cap \tau_2$

(2) $A, B \in \tau_1 \cap \tau_2 \Rightarrow A, B \in \tau_1 \wedge A, B \in \tau_2$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \cap B \in \tau_1 \\ A \cap B \in \tau_2 \end{array} \right\} \Rightarrow A \cap B \in \tau_1 \cap \tau_2$$

(3) $A_i \in (\tau_1 \cap \tau_2) \; (\forall i \in I) \rightarrow A_i \in \tau_j \quad \forall i \in I, j \in \{1, 2\}$

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_j \quad ; j \in \{1, 2\} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_1 \cap \tau_2$$

وبالتالي $\tau_1 \cap \tau_2$ تبولوجيا على X

② من أجل τ_i تبولوجيا على X ~~[illegible]~~ حيث $(i \in I)$ فإنّ $\bigcap_{i \in I} \tau_i$ هو تبولوجيا على X تمرين

③ إذا كان τ_1, τ_2 تبولوجيا على X فليس بالضرورة أن يكون $\tau_1 \cup \tau_2$ تبولوجيا على X والتبولوجيات τ_3, τ_2, τ_1 في المثال السابق توضح ذلك حيث أن

$\tau_3 = \tau_1 \cup \tau_2$ ليست طبولوجيا

تمارين: بين فيما إذا كانت (X, τ) فضاء تبولوجي في الحالات التالية

1) $X = \{a, b, c\}$, $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

2) $X = \{a, b, c\}$, $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}\}$

3) $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau_3 = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c, d\}\}$

4) $X = \{a, b, c, d, e\}$, $\tau_4 = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c, d\}\}$

كلاً من الأمثلة ① و ③ تشكل فضاء تبولوجي

المثال ② (X, τ_2) ليست فضاء تبولوجي لأن

$\{a, b\}, \{b, c\} \in \tau_2 \wedge \{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \notin \tau_2$

المثال ④ (X, τ_4) ليست فضاء تبولوجي لأن

$\{a, b\}, \{c, d\} \in \tau_4 \wedge \{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\} \notin \tau_4$

أمثلة هامة:

1- لتكن $X \neq \emptyset$، إن $(X, \{\emptyset, X\})$ هي فضاء تبولوجي على X حيث تدعى $\{\emptyset, X\}$ التبولوجيا التافهة على X وهي أصغر تبولوجيا يمكن تعريفها على X (بالنسبة للاحتواء)

2- $(X, P(X))$ هي فضاء تبولوجي على X، τ تدعى التبولوجيا المتقطعة على X وهي أكبر تبولوجيا على X وأي مجموعة جزئية من X ستكون مفتوحة بالنسبة للتبولوجيا المتقطعة وبالمقابل كل مجموعة $B \subset X$ حيث $X \neq B \neq \emptyset$ ستكون غير مفتوحة بالنسبة للتبولوجيا التافهة على X.

3 - إذا كان $X = \mathbb{R}$ ولتكن τ مجموعة تحوي ϕ واجتماع كل المجالات المفتوحة في $\mathbb{R}$ بعبارة أخرى τ هي مجموعة كل المفتوحات في $\mathbb{R}$ فتكون τ تبولوجيا على $\mathbb{R}$ سندعوها بالتبولوجيا المألوفة.

4 - لتكن $X = \mathbb{R}^2$ ولتكن

$\tau = \{ B : B \subset \mathbb{R}^2 : \mathbb{R}^2$ مجموعة مفتوحة في $B\}$

عندئذٍ فإن τ تبولوجيا على $\mathbb{R}^2$ ونسميها التبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}^2$ لأن: (1) بما أن $\phi, \mathbb{R}^2$ مفتوحات $\Leftarrow \phi, \mathbb{R}^2 \in \tau$

(2) التقاطع المنتهي للمفتوحات في $\mathbb{R}^2$ هو مفتوحة

(3) الاجتماع الكيفي للمفتوحات في $\mathbb{R}^2$ هو مجموعة مفتوحة

5 - لتكن X غير منتهية ولتكن

$\tau = \{ \phi , B : B \subset X ; \ X \setminus B = B^c$ منتهية$\}$

سندعو τ تبولوجيا زارسكي على X ولنرهن أنها تبولوجيا

ملاحظة: تم رفع الفصل الأول كملف بصيغة pdf على موقع الدكتور www.wesam.co.nr

انتهت المحاضرة السادسة