14/4/2014 الاثنين المحاضرة الحادية عشرة

حل المسألة في المحاضرة السابقة:

$$I_n = card\{\pi \in S_n : \pi(i) \neq i, \forall i \in [n]\}$$

توجيه:

$$A_i = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i\} \subset S_n \; ; \; i \in [n]$$

$$\Rightarrow I_n = \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right|$$

نستخدم القانون:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right| = |X| + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}|$$

$$\rightarrow I_n = |S_n| + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} (n-r)!$$

لأن: $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r} = \{\pi \in S_n : \pi(i_1) = i_1, \dots, \pi(i_r) = i_r\}$

$$\Rightarrow |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}| = |S_{[n] \setminus \{i_1, \dots, i_r\}}|$$

$$= |[n] \setminus \{i_1, \dots, i_r\}|\,!$$

$$= (n-r)!$$

$$\Rightarrow I_n = n! + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r (n-r)! \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} 1$$

$$= n! + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r (n-r)! \, . \, card\{(i_1, \dots, i_r) \in [n]^r : i_1 < i_2 < \dots < i_r\}$$

$$\rightarrow I_n = n! + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r (n-r)! \binom{n}{r}$$

لكن:

$$(n-r)! \binom{n}{r} = (n-r)! \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!}$$

$$\rightarrow I_n = n! + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \frac{n!}{r!} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r . \frac{n!}{r!}$$

$$\rightarrow I_n = n! \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!}$$

وهو عدد التباديل في S_n والتي لا تملك نقاط ثابتة ، لنتحقق من ذلك من أجل $n=3$:

$$I_3 = 3!\left(\frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!}\right)$$

$$= 6\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = 3 - 1 = 2$$

لنتأكد من أن S_3 تملك تقابلين فقط دون نقاط ثابتة:

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

التقابلات التي لا تملك نقاط ثابتة في S_3 هي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

تمرين: أثبت أنه $\forall n \in \mathbb{N}^*$ فإنه:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n.2^{n-1}$$

الحل:

نعلم أنه:
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

لنأخذ:
$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, 1^{n-1}$$

نشتق الطرفين فنجد:
$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

نعوض $\Leftarrow x = 1$

$$n\,2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$$

وهو المطلوب.

ملاحظة: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ حيث $x<1$

تمرين: أثبت أنه $\forall n \in \mathbb{N}^*$ فإنه:
(يعاد لاحقاً)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

تمرين: أوجد عدد التوابع الغامرة من $[m]$ إلى $[n]$ حيث $m,n \in \mathbb{N}$.

توجيه: $i \in [n]$، لنأخذ A_i هي مجموعة من التوابع من $[m]$ إلى $[n]$ بحيث أن العنصر i في المستقر لا يصله أي سهم أي أن:

$$A_i : \{ f : [m] \longrightarrow [n] \;/\; f^{-1}(\{i\}) = \phi \}$$

فتكون مجموعة من التوابع الغامرة من $[m]$ إلى $[n]$ هي: $A_1^c \cap \ldots\ldots \cap A_n^c$
ولنبحث عن عدد عناصر هذه المجموعة.