الموضوع: مذكرة (ج ٤) د: فيصل جديد / /

بسم الله الرحمن الرحيم،

* حل الأمثلة الواردة في المحاضرات السابقة،

* حل المثال الأول في المحاضرة الثانية،

« ينبغي وضع نموذج رياضي لكل مشكلة واقعية تواجه مدير (أي بناء نموذج رياضي لحقيقة أكبر ربح للشركة) ---»

ملاحظة قبل البدء بالحل:

الكلام الذي سيقدم لنموذج الرياضي هام جداً وعليه الجزء الأكبر من الدرجات أي لا يكفي كتابة النموذج فقط واعتنا الفرضيات هي الأهم.

الحل: نفرض x_1 الكمية المنتجة من المنتج A_1

x_2 الكمية المنتجة من المنتج A_2

الربح الناتج من المنتج A_1 هو $30x_1$

الربح الناتج من المنتج A_2 هو $40x_2$ عندئذ يكون:

ربح الصنع الناتج من إنتاج المنتجين A_1 و A_2 هو: $30x_1 + 40x_2$

الشروط:

« شرط المادة B_1 » $4x_1 + 8x_2 \leq 30$ ← المتوفر من B_1 ← الكمية المأخوذة من المادة B_1 لإنتاج المنتج A_1

« شرط المادة B_2 » $4x_1 + 3x_2 \leq 20$ ← المتوفر من B_2

« شرط المادة B_3 » $5x_2 \leq 25$

عندئذ يكون النموذج الرياضي:

أوجد القيمة العظمى لـ: $Z = 30x_1 + 40x_2 \longrightarrow Max$

تحت الشروط التالية:

$$4x_1 + 8x_2 \leq 30$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 20$$
$$5x_2 \leq 25$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

* حل المثال الثاني في المحاضرة الثانية: « طريقة السمبلكس الطريقة الأولى »

نفرض x_1 الكمية المنتجة من A_1 في الأقسام الثلاثة

X_2 الكمية المنتجة من A_2 في الأقسام الثلاثة.

X_3 الكمية المنتجة من A_3 في الأقسام الثلاثة.

الربح الناتج عن إنتاج المنتج A_1 هو $10X_1$

الربح الناتج عن إنتاج المنتج A_2 هو $20X_2$

الربح الناتج عن انتاج المنتج A_3 هو $12X_3$ عندئذ:

ربح المصنع لإنتاج A_1, A_2, A_3 هو: $10X_1 + 20X_2 + 12X_3$

الشروط:

شرط القسم الأول: $2X_1 + X_2 + 3X_3 \leqslant 120$

شرط القسم الثاني: $X_1 + 2X_2 \leqslant 60$

شرط القسم الثالث: $2X_1 + X_3 \leqslant 40$

شرط عدم السلبية: $X_1, X_2, X_3 \geq 0$

عندئذ يكون النموذج الرياضي:

أوجد $Z = 10X_1 + 20X_2 + 12X_3 \longrightarrow Max$

تحت الشروط التالية:

$$2X_1 + X_2 + 3X_3 \leqslant 120$$
$$X_1 + 2X_2 \leqslant 60$$
$$2X_1 + X_3 \leqslant 40$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

*حل المثال الثالث في المحاضرة الثانية: «المكملة المثالية بإنتاج القطاع»

إنّ الجدول في هذا المثال يوضح المكلفة.

نفرض أن إجمالي التكلفة الإنتاجية للمصنع الأول سيارتي واحدة ليس كمية واحدة»

نفرض أن إجمالي التكلفة الإنتاجية للمصنع الثاني سيارتي لواحد.

نفرض أنّ اجمالي التكلفة الانتاجية للمصنع الثالث سيارتي لواحد.

نفرض X_{ij} الكمية المنتجة من النوع i في المصنع j حيث $i = 1,2$, $j = 1,2,3$

عندئذ نستطيع كتابة الجدول التالي:

الموضوع : ..... / /

النوع \ المصنع	1		2		3	
A	x_{11}	$\frac{1}{100}$	x_{12}	$\frac{1}{120}$	x_{13}	$\frac{1}{360}$
B	x_{21}	$\frac{1}{200}$	x_{22}	$\frac{1}{240}$	x_{23}	$\frac{1}{120}$

تعيين الجدول:

$\frac{1}{100}$: تكلفة لوحدة واحدة من النوع الأول في المصنع الأول.

$\frac{1}{240}$: تكلفة لوحدة واحدة من النوع الثاني في المصنع الثاني.

- تكلفة انتاج النوع الأول في المصانع الثلاثة:

$$\frac{1}{100}x_{11} + \frac{1}{120}x_{12} + \frac{1}{360}x_{13}$$

تكلفة انتاج النوع الثاني في المصنع الثلاثة:

$$\frac{1}{200}x_{21} + \frac{1}{240}x_{22} + \frac{1}{120}x_{23}$$

ما سبق تكون كلفة الانتاج للنوعين في المصانع الثلاثة:

$$\frac{1}{100}x_{11} + \frac{1}{120}x_{12} + \frac{1}{360}x_{13} + \frac{1}{200}x_{21} + \frac{1}{240}x_{22} + \frac{1}{120}x_{23}$$

الشروط:

شروط الطاقة (العدد الأقصى لكل مصنع من طاقته):

شرط الطاقة الإنتاجية للمصنع الأول: $\frac{1}{100}x_{11} + \frac{1}{200}x_{21} \leq 1$

شرط الطاقة الانتاجية للمصنع الثاني: $\frac{1}{120}x_{12} + \frac{1}{240}x_{22} \leq 1$

شروط الطاقة للمصنع الثالث:

$$\frac{1}{360}x_{13} + \frac{1}{120}x_{23} \leq 1$$

وشروط عدم السلبية: $x_{ij} \geq 0$ حيث: $i = 1,2$ ، $j = 1,2,3$

عندئذ يكون النموذج البرامجي:

أوجد:

$$L = \frac{1}{100}x_{11} + \frac{1}{120}x_{12} + \frac{1}{360}x_{13} + \frac{1}{200}x_{21} + \frac{1}{240}x_{22} + \frac{1}{120}x_{23} \rightarrow \text{Min}$$

وذلك تحت الشروط:

$$\frac{1}{100}x_{11} + \frac{1}{200}x_{21} \leq 1$$

$$\frac{1}{120}x_{12} + \frac{1}{240}x_{22} \leq 1$$

$$\frac{1}{360}x_{13} + \frac{1}{120}x_{23} \leq 1$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad ; \quad i = 1,2 \quad , \quad j = 1,2,3$$

الموضوع : ..... / /

* حل المثال الأول في المحاضرة السابقة :

نموذج المناطق الزراعية : « تصحيح في الجدول قبل الحل »

سعر الطن	الطلب	هوران	حلب	الغاب	الساحل	المناطق / المحصول
1500	2000	6	6	4	5	1

الحل : على أساس أن زراعة المنطقة لمحصول واحد لذا نفرض المجاهيل بدلالة أي :

نفرض أن X_{ij} المساحة التي نزرعها من المحصول i في المنطقة j

نفرض : X_{11} : الكمية المزروعة من القمح في الساحل (المحصول الأول في المنطقة الأولى)

X_{12} : الكمية المزروعة من القمح في الغاب (المحصول الأول في المنطقة الثانية)

X_{13} : الكمية المزروعة من القمح في حلب (المحصول الأول في المنطقة الثالثة)

X_{14} : الكمية المزروعة من القمح في حوران (المحصول الأول في المنطقة الرابعة)

X_{21} : الكمية المزروعة من السكر في الساحل (المحصول الثاني في المنطقة الأولى)

X_{31} : الكمية المزروعة من القطن في الساحل (المحصول الثالث في المنطقة الأولى)

وهكذا بالنسبة للباقي المجاهيل في باقي المناطق

الربح العائد من القمح : $1500 (5X_{11} + 4X_{12} + 6X_{13} + 6X_{14})$

سعر الطن × الكمية المنتجة من القمح في كل المناطق

الربح العائد من السكر $1000 (6X_{21} + 5X_{22} + 4X_{23} + 6X_{24})$

الربح العائد من القطن : $5000 (4X_{31} + 10X_{32} + 8X_{33} + 5X_{34})$

الربح العائد من الشمندر : $4500 (7X_{41} + 2X_{42})$

الربح العائد من الشوندر : $500 (3X_{51} + 12X_{52} + 10X_{53} + 4X_{54})$

⇐ الربح العام العائد من زراعة المجاهيل الخمسة في المناطق الأربع هو :

$$[1500(5X_{11} + 4X_{12} + 6X_{13} + 6X_{14}) + 1000(6X_{21} + 5X_{22} + 4X_{23} + 6X_{24}) + 5000(4X_{31} + 10X_{32} + 8X_{33} + 5X_{34}) + 4500(7X_{41} + 2X_{42}) + 500(3X_{51} + 12X_{52} + 10X_{53} + 4X_{54})]$$

الشروط : كمية القمح العائدة من المناطق المزروعة

$5X_{11} + 4X_{12} + 6X_{13} + 6X_{14} \leq 2000$ تسرطر القمح

شرط البقر : $6X_{21} + 5X_{22} + 4X_{23} + 6X_{24} \geq 1500$

شرط العلف : $4X_{31} + 10X_{32} + 8X_{33} + 5X_{34} \geq 500$

شرط البيع : $7X_{41} + 2X_{42} \geq 100$

شرط السكن : $3X_{51} + 12X_{52} + 10X_{53} + 4X_{54} \geq 700$

السكن الساحل تبع ساحل مختلف الساحل البقر الساحل

شروط المساحة : $X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} + X_{51} = 10$ ← كمية الكلي المزروعة في

$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} + X_{52} = 15$

$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} + X_{53} = 160$

$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} + X_{54} = 50$

« وضمنا الإشارة المساواة في هذه الشروط لأنه يجب استغلال جميع المساحة »

وبالتالي يكون النموذج الرياضي :

أوجد $Z = [1500(5X_{11} + 4X_{12} + 6X_{13} + 6X_{14}) + 1000(6X_{21} + 5X_{22} + 4X_{23} + 6X_{24}) + 5000(4X_{31} + 10X_{32} + 8X_{33} + 5X_{34}) + 4500(7X_{41} + 2X_{42}) + 500(3X_{51} + 12X_{52} + 10X_{53} + 4X_{54})] \longrightarrow MAX$

وفقه الشروط السابقة :

الشروط على الماصيل والشروط كل المساحة وشروط عدم السلبية طبعا :

$X_{ij} \geq 0 \quad ; \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad , \quad j = 1, 2, 3, 4$

* حل المثال الثاني في المحاضرة الثالثة : « مسألة خليط التبغ »

نفرض X_1 ما ينتج من النوع A

X_2 ما ينتج من النوع B

X_3 ما ينتج من النوع C

وبالتالي : مجمع العائد من انتاج A, B, C هو : $Z = 4X_1 + 2X_2 + 3X_3$

الشروط :

شرط ساعات العمل : $7X_1 + 3X_2 + 6X_3 \leq 150$

شرط المواد : $4X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 200$

شرط عدم السلبية $X_1, X_2, X_3 \geq 0$

وبالتالي سيكون النموذج الرياضي :

أوجد : $Z = 4X_1 + 2X_2 + 3X_3 \longrightarrow Max$

وحقق الشروط :

$7X_1 + 3X_2 + 6X_3 \leq 150$

$4X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 20$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

* مسألة اختيار وسيلة إعلان :

تزمع شركة اعلانات بتخطيط عملة إعلامية باستخدام ثلاث وسائل مختلفة هي :

التلفاز، الإذاعة، المجلات، هدف هذه العملة الوصول إلى أكبر عدد ممكن من الزبائن وتعطينا نتائج دراسة السوق في الجدول التالي :

	التلفاز		الإذاعة	المجلات
	خلال النهار	الوقت الرئيسي		
كلفة الوحدة الإعلامية	40 000	70 000	30 000	15 000
عدد الزبائن المحتملين للوحدة الإعلامية	400 000	500 000	500 000	200 000
عدد الزبائن المحتملين للوحدة الإعلامية من الإناث	300 000	40 000	200 000	100 000

نفرض أن الشركة تريد إنفاق أكثر من 800 000 على الإعلان وترغب بما يلي :

1. ألا يقل عدد الإناث عن 2 مليون.
2. أن تتقيد كلفة الإعلان بالتلفاز بـ 500 ألف.
3. أن تشتري على الأقل ثلاث وحدات إعلانية بالتلفاز خلال النهار وواحدة بالوقت الرئيسي.
4. أن يتراوح عدد الوحدات الإعلانية عبر الإذاعة والمجلات بين 5 و 10 وحدات لكل منها.

المطلوب :

صياغة النموذج الرياضي الذي يحقق هدف الشركة.

الحل :

إن هدف الشركة هو أن يكون عدد الزبائن أكبر ما يمكن.

نفرض X_1 عدد الوحدات الإعلانية المشتراة في التلفاز أثناء النهار.

X_2 عدد الوحدات الإعلانية المشتراة في التلفاز في الوقت الرئيسي.

X_3 عدد الوحدات الإعلانية المشتراة في الإذاعة.

X_4 عدد الوحدات الإعلانية المشتراة في المجلات.

العدد الكلي من الزبائن المتوقع أن تصل إليه الشركة :

الموضوع : ..... / /

$400000X_1 + 300000X_2 + 500000X_3 + 200000X_4$

الشروط:

شرط الإعلام بالتلفاز: $40000X_1 + 75000X_2 \leq 500$

$X_1 \geq 3 \quad , \quad X_2 \geq 2$

شرط الإنتاج: $300000X_1 + 800000X_2 + 200000X_3 + 100000X_4 \leq 2000000$

شروط الإذاعة والبرمجيات: $10 \geq X_3 \geq 5 \quad , \quad 10 \geq X_4 \geq 5$

شرط الإنفاق:

$40000X_1 + 75000X_2 + 30000X_3 + 15000X_4 \leq 800000$

ملاحظة:

عادة يوضع شرط عدم السلبية $(X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0)$ لأنه يوجد دائما خمسة على الشروط وبالتالي يكون النموذج الرياضي:

أوجد:

$Z = 400000X_1 + 300000X_2 + 500000X_3 + 200000X_4 \longrightarrow Max$

وفق الشروط:

$40000X_1 + 75000X_2 \leq 500$

$X_1 \geq 3 \quad , \quad X_2 \geq 2$

$300000X_1 + 400000X_2 + 200000X_3 + 100000X_4 \geq 2000000$

$10 \geq X_3 \geq 5 \quad , \quad 10 \geq X_4 \geq 5$

$40000X_1 + 75000X_2 + 30000X_3 + 15000X_4 \leq 800000$

انتهت المحاضرة.

yehia-D