«المحاضرة السابعة»

*4 المثاليات وحلقة القسمة Ideals and Quotient Ring

4.1 المثاليات :

4.1.1 تعريف :

- لتكن R حلقة و $\emptyset \neq I \subseteq R$ .. عندئذٍ :

*) I مثالي أيمن من R ، إذا تحقق :

~ $\forall a,b \in I \; ; \; a-b \in I$

~ $\forall a \in I, \forall r \in R \; ; \; r.a \in I$

**) I مثالي أيسر من R ، إذا تحقق :

~ $\forall a,b \in I \; ; \; a-b \in I$

~ $\forall a \in I, \forall r \in R \; ; \; a.r \in I$

***) I مثالي من R إذا كان I مثالي أيمن وأيسر من R .. ونرمزه (($I \trianglelefteq R$))

- أمثلة :

1- $R=(\mathbb{Z},+,.)$ ، إن : $I=2\mathbb{Z}$ مثالي من R ..

2- $R=(\mathbb{Z}_{12},\oplus,\otimes)$ ، إن : $I=2\mathbb{Z}_{12} \wedge I=3\mathbb{Z}_{12}$ مثاليات من R ..

3- $R=\mathbb{R}[x]$ ، إن :

$$I=\{x.f(x) : f(x)\in R\} \Rightarrow I \trianglelefteq R$$

- $R=(\mathbb{Z}_6,\oplus,\otimes) \leftarrow I=2\mathbb{Z}_6$

- R حلقة $\Leftarrow$ $R \trianglelefteq R$ ، $\{0\} \trianglelefteq R$ ..

4-1-2. مبرهنة:

ـ لتكن R حلقة و $\{S_i\}_{i\in I}$ مجموعة مرقمة من المثاليات من R ..

إن: $S=\bigcap_{i\in I} S_i$ مثالي من R ..

«الإثبات» ..

$*$- $\forall i\in I ; 0\in S_i \Rightarrow 0\in S \Rightarrow S\neq\emptyset$

$**$- $\forall a,b\in S \Rightarrow a,b\in S_i \ , \forall i\in I$

$\Rightarrow a-b\in S_i \ , \forall i\in I \Rightarrow a-b\in S$

- $\forall a\in S, \forall r\in R \Rightarrow a\in S_i \ , r\in R$

$\Rightarrow \forall i\in I ; a.r\in S_i \ \wedge r.a\in S_i$

$\Rightarrow a.r\in S \ \wedge r.a\in S$

$\Rightarrow$ S مثالي من R $\Leftrightarrow S\trianglelefteq R$

#

«تمرين» .. وظيفة ..

1- بين أن اجتماع مثاليين ليس بالضرورة أن يكون مثالي .

2- إذا كانت $R \trianglerighteq I_1, I_2$ ، فإن: $I=I_1\cup I_2$ مثالي من R ..

إذا وفقط إذا $I_1\leq I_2$ أو $I_2\leq I_1$. أثبت ذلك .

4-1-3- مبرهنة: « اختبار متى تكون الحلقة مثالي »

ـ لتكن R حلقة واحدية . عندئذٍ القضايا التالية صحيحة:

1 - إذا كان I مثالي من R ويحقق: $1\in I$ فإن: $I=R$ ..

2 - إذا كان I مثالي من R ويحقق:

$\exists a\in I$ «قابل للقلب» $\Rightarrow I=R$

«الإثبات» :

1 - «من تعريف إمثالي» «$I \subseteq R$»

- من جهة ثانية :

*- $\forall r \in R ; r = 1.r \in I \Rightarrow$ «$R \subseteq I$»

$\Rightarrow I = R$ #

2 - ليكن I مثالي من R ، وحقق :

$\exists a \in I : \exists a^{-1} \in R \Rightarrow 1 = a.a^{-1} \in I$

«من 1» $\Rightarrow I = R$ #

4-1-4 - تعريف : $I \trianglelefteq R$

- لتكن R حلقة و $I \in R$ و $R \supseteq S = \{S_1, S_2, \ldots\ldots, S_n\}$

عندئذٍ :

*) - نقول عن I أنه مولد بالمجموعة S إذا تحقق :

$\forall a \in I, \exists S \subseteq R: a = \sum_{i=1}^{n} r_i . S_i \quad ; r_i \in R$

ونرمز لذلك بالرمز :

$I = \langle S \rangle = \langle S_1, \ldots\ldots, S_n \rangle$ «وهو أصغر مثالي في R يحوي S»

) - إذا كان I مولد بعنصر وحيد فإن I يدعى **مثالي رئيسي ونرمز لذلك : $a \in I : I = \langle a \rangle$

***) - إذا كان كل مثالي في R هو مثالي رئيسي فإن R تدعى **حلقة مثاليات رئيسية** .

****) - إذا كانت R منطقة تكاملية ، وكل مثالي من R هو مثالي رئيسي .

Subject: / /

فإن R تدعى منطقة مثاليات رئيسية ونرمز لها بالرمز «PID» ـ «Principal Ideal Domain»

ـ أمثلة:

1 ـ $R=(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ، إن:

$$4\mathbb{Z}=\langle 4\rangle=\{4r+4n : r\in R \wedge n\in\mathbb{Z}\}$$
$$=\{0,\mp 4,\mp 8,\ldots\ldots\}$$

مثالي رئيسي.

2 ـ $R=(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ، إن R هي «PID» لأن:

ـ الإثبات:

ـ ليكن: $I \trianglelefteq R$ عندئذٍ نميز حالتين:

*) ـ $I=\langle 0\rangle$ ← يتم المطلوب.

**) ـ $I\neq\langle 0\rangle$ ⇐

بفرض أن m هو أصغر عدد صحيح موجب من I ، ولنبرهن على أن I مولدة بـ m .. أي: $I=\langle m\rangle$.

$$\Rightarrow \boxed{\langle m\rangle\subseteq I}$$ « لأن المثالي المولد بمجموعة يكون أصغر مثالي يحوي هذه المجموعة »

ـ ليكن $a\in I$ ، فإن: « حسب خوارزمية القسمة »

$$\exists q,r\in\mathbb{Z} : a=m.q+r \Rightarrow r=0 \vee 0<r<m$$

ـ لنفرض جدلاً أن: $r\neq 0$

$$\Rightarrow r=\overset{\in I}{a}-\overset{\in I}{m.q}\in I$$

وهذا ينافي كون m أصغر عدد صحيح من I .

⇐ الفرض الجدلي خاطئ ⇐ «$r=0$»

$$\Rightarrow a=m.q \Rightarrow a\in\langle m\rangle \Rightarrow \boxed{I\subseteq\langle m\rangle}$$

$$\Rightarrow I=\langle m\rangle \Rightarrow I \text{ هو } \underline{\underline{PID}}$$

#

- إذا كان R حقل فبين أنه PID «هل العكس صحيح»

Subject: / /

3 - إذا كانت R حقل فإن : $R[x]$ هي «PID»

الحل :

- R حقل $\Leftarrow$ R هي ID . «حسب تعريف سابق»

- ليكن $I \trianglelefteq R[x]$ .. وهنا نميز حالتين :

$*$ - if $I = \langle 0 \rangle \longrightarrow$ يتم المطلوب

$*$ - if $I \neq \langle 0 \rangle \Rightarrow$

$*$ - نفرض أن $g \in I$ الحدودية ذات الدرجة الأصغر في I ..

• لنبرهن أن I مولدة بـ g .

$*$ - $g \in I \Rightarrow$ «$\langle g \rangle \subseteq I$»

$**$ - «حسب خوارزمية القسمة» $\Rightarrow \forall f \in I$ و $\exists q, r \in R[x]$:

$f = g . q + r$ و $r = 0$

or: $\deg(r) < \deg(g)$

$*$ - لنفرض جدلاً أن : «$r \neq 0$» $\Leftarrow$

$r = \underset{I \ni}{f} - \underset{I \ni}{g} . q \in I$

معا ينا قض كون g ذات الدرجة

الأصغر من I . $\Leftarrow$ الفرض الجدلي خاطئ $\Leftarrow$ «$r = 0$»

$\Rightarrow f = g . q \Rightarrow f \in \langle g \rangle \Rightarrow$ «$I \subseteq \langle g \rangle$»

$\Rightarrow I = g$

• بالتالي : $R[x]$ هي عبارة عن «PID»

#

«تمرين» ... وظيفة -

1 - هل $R = (\mathbb{Z}[x], +, .)$ هي حلقة مثاليات رئيسية ؟

2 - هل إذا كان : ~~[illegible]~~

$I = \{ f = \sum_{i=0}^{n} a_i . x^i : a_n \in \mathbb{Z}, a_0 \equiv 0 \pmod 2 \}$ $\Leftarrow$ I مثالي في R

4_1_5 _ تعريف :

_ لتكن R حلقة و $I, J \trianglelefteq R$ .. عندئذٍ :

[1] _ $I+J = \{a+b : a \in I, b \in J\} \trianglelefteq R$

[2] _ $I.J = \{\sum_{i} a_i . b_i : a_i \in I, b_i \in I\} \trianglelefteq R$

مجموع منتهي

[3] _ $I:J = \{r \in R : r.J \subseteq I\} \trianglelefteq R$

« The quotient of I by J »

[4] _ $\sqrt{I} = \{r \in R : \exists n \in \mathbb{Z}^{+} ; r^{n} \in I\} \trianglelefteq R$

« $I+J, I.J, I:J, \sqrt{I}$ » $\trianglelefteq R$

* مثال :

مجموع مولدات gcd

$R = (\mathbb{Z}, +, .)$ و $I = \langle 2 \rangle \wedge J = \langle 3 \rangle$

$\Rightarrow I+J = \langle 1 \rangle = R$

$I.J = \langle 6 \rangle$

_ إذا كانت $A = \langle 6 \rangle$, $B = \langle 0 \rangle$ فإن :

$I:A = \langle 3 \rangle = \{r \in \mathbb{Z} : r.A \in I\}$

$I:B = \{r \in R : r.0 \in I\} = R$

$B:I = \{r \in R : r.I \subseteq \{0\}\} = \{0\}$

Subject: / /

4-1-6- تعريف:

- لتكن R حلقة وَ $I_1, I_2, \dots, I_n$ مثاليات في R ..

عندئذٍ:

*) - نقول عن المجموع: " $I = \sum_{i=1}^{n} I_i$ " أنه مجموع مباشر

إذا تحققت:

$$\Leftrightarrow \forall a \in I \; ; \exists a_i \in I_i : a = a_i + \dots + a_n$$

يكتب بشكل وحيد ..

ونرمز لذلك بالرمز " $I = \bigoplus_{i=0}^{n} I_i$ "

**) - R مجموع مباشر للمثاليات: $I_1, \dots, I_n$ إذا تحقق:

$$\text{"} R = \bigoplus_{i=1}^{n} I_i \text{"}$$

- مثال:

- لتكن $R = (\mathbb{Z}_{12}, \oplus, \otimes)$ .. وَ $I_1 = 6\mathbb{Z}_{12} = \{0, 6\}$

$I_2 = 4\mathbb{Z}_{12} = \{0, 4, 8\}$

$$\Rightarrow I_1 \oplus I_2 \rightarrow \text{مجموع مباشر}$$

?

$$I_3 = 2\mathbb{Z}_{12} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$\Rightarrow I_1 + I_3 \rightarrow \text{ليس مجموع مباشر}$$

لأن: $10 = \overset{\in I_3}{4} + 6_{\in I_1}$

$I_1 + I_3 \Rightarrow 10 = \underset{\in I_3}{8} + 2_{\in I_3}$

7-1-4- مبرهنة :

- لتكن R حلقة و $I_1, I_2, \dots, I_n$ مثاليات من R ..

عندئذٍ الشروط التالية متكافئة :

$\boxed{1}$- $\sum_{i=1}^{n} I_i$ مجموع مباشر .

$\boxed{2}$- $a_i \in I_i \quad \forall i \in \{1,2,\dots,n\} : \sum_{i=1}^{n} a_i = 0 \Rightarrow a_i = 0$

$\boxed{3}$- $I_i \cap \left(\sum_{j \neq i} I_j\right) = \{0\}$

«الإثبات» .. « $\boxed{2} \Leftarrow \boxed{1}$ »

- من جهة أولى :

$$0 \in \sum_{i=0}^{n} I_i \Rightarrow \exists a_i \in I_i : \forall i \in \{1,\dots,n\} \text{ ؛}$$

$$0 = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

- من جهة ثانية :

$$0 = \underset{\in I_1}{0} + \underset{\in I_2}{0} + \dots + \underset{\in I_n}{0}$$

$$\Rightarrow \forall i \in \{1,\dots,n\} \text{ ؛ } ((a_i = 0))$$

#

« $\boxed{3} \Leftarrow \boxed{2}$ »

$$\forall x \in I_i \cap \left(\sum_{j \neq i} I_j\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in I_i \Rightarrow \exists a_i \in I_i : x = a_i \\ x \in \sum_{j \neq i} I_j \Rightarrow \exists a_j \in I_j : x = \sum_{j \neq i} a_j \end{cases}$$

أي أن : $x = a_i \in I_i \Leftarrow$

Subject: / /

$$x = a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_n$$

$$\Rightarrow 0 = x - x = a_1 + \dots + a_{i-1} + (-a_i) + (a_{i+1}) + \dots + a_n$$

من $\boxed{2}$ $\Rightarrow a_i = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \{0\} = I_i \cap (\sum_{j \neq i} I_j)$

#

« $\boxed{1} \Leftarrow \boxed{3}$ »

- نفرض أن: « $x \in \sum_{i=1}^{n} I_i$ » يكتب بطريقتين:

$$\Rightarrow x = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$
$$x = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

بحيث:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} ; a_i, b_i \in I_i$$

$$\Rightarrow 0 = x - x = (a_1 - b_1) + \dots + (a_n - b_n)$$

$$\Rightarrow \underbrace{b_j - a_j}_{\in I_j} = \underbrace{(a_1 - b_1) + \dots + (a_{j-1} - b_{j-1}) + (a_{j+1} - b_{j+1}) + \dots (a_n - b_n)}_{\in \sum_{i \neq j} I_i}$$

$$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} ; b_i - a_i \in I_i \cap (\sum_{j \neq i} I_j) = \{0\}$$

$$\Rightarrow a_i = b_i , \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

#