10/4/2014 الخميس المحاضرة الثامنة

الموضوع: تطبيقات د. ت. م.

- تعريف المنحني القابل للتجميع (المنحني المجمع / القابل للتقويم).
- مبرهنة جوردان (في المستوي)

الشرط اللازم والكافي ليكون المنحني مجمعاً هو أن تكون الدوال $x(t)$ و $y(t)$ دوال د. ت. م على $[\alpha, \beta]$.

- تعريف المنحني المجمع: إذا كان لدينا المنحني k المعرف وسيطياً:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) = x(t) \\ y = \psi(t) = y(t) \end{cases}$$

حيث كل من x و y مُعرّف ومستمر على المجال $[\alpha, \beta]$ ولا يحتوي على نقاط مضاعفة (باستثناء البداية والنهاية في حال المنحني المغلق)، ثم لنأخذ التجزئة:

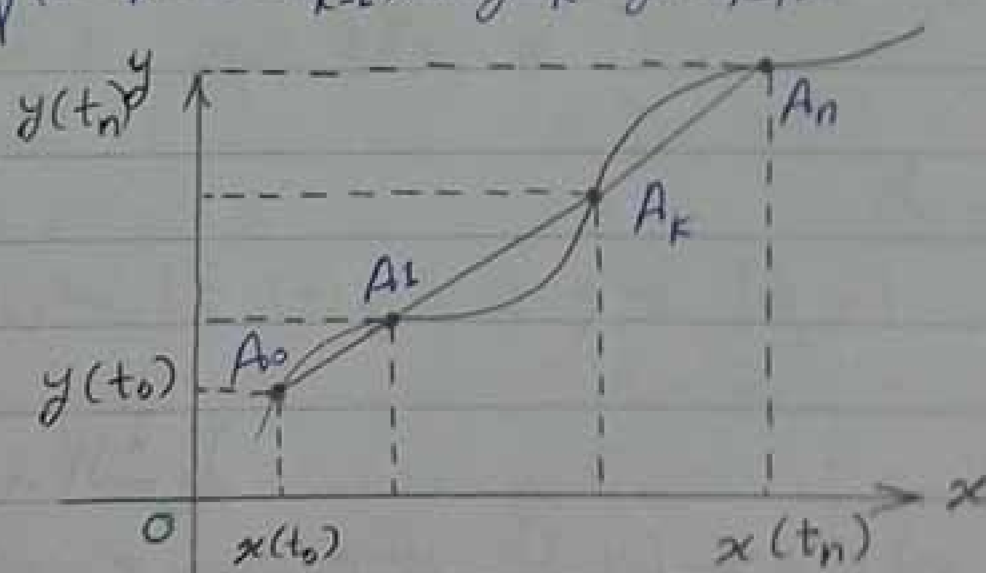
$$P = \{\alpha = t_0, t_1, \ldots, t_n = \beta ; \alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta\}, P \in \mathbb{P}[\alpha, \beta]$$

ولنعرف:

$$L(P) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}$$

لكل تجزئة مستقل مجمع

$\downarrow$
طول الخط المنكسر



فإذا أخذنا:

$$l = \sup_{P \in \mathbb{P}[\alpha, \beta]} \{L(P)\} < \infty$$

طول المنحني المجمع

ندعو k منحنياً مجمعاً.

ملاحظة: كلما كانت التجزئة أدق كلما كانت الخطوط المنكسرة أقرب للتابع المطلوب.

$\star \ \sum |a| \leqslant \sum \sqrt{a^2+b^2}$ $\star\star \ \sqrt{a^2+b^2} \leqslant |a|+|b|$

مبرهنة جوردن:

لزوم الشّرط: K منحني يجمّع ← $x(t)$ و $y(t)$ د.ت.م على $[\alpha,\beta]$

حسب الفرض ←

$$l = \sup_{P\in \mathbb{P}[\alpha,\beta]} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k)-x(t_{k-1}))^2+(y(t_k)-y(t_{k-1}))^2}$$

حيث: $P = \{\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta\}$

نلاحظ أنّ: $L(P) \leqslant l$

ولكن:

$$\sum_{k=1}^{n} |x(t_k)-x(t_{k-1})| \leqslant L(P) \leqslant l$$

بالاعتماد على $\star$

← بأخذ الـ sup للطّرفين نجد:

$$\bigvee_{\alpha}^{\beta} x(t) \leqslant l$$

مقدار محدود

وهذا بدوره يعني أنّ $x(t)$ دالّة ذات تغيّر محدود على $[\alpha,\beta]$

بطريقة مشابهة نجد:

$$\sum_{k=1}^{n} |y(t_k)-y(t_{k-1})| \leqslant l$$

← بأخذ الـ sup للطّرفين نجد:

$$\bigvee_{\alpha}^{\beta} y(t) \leqslant l$$

وهذا بدوره يعني أنّ $y(t)$ د.ت.م على $[\alpha,\beta]$

كفاية الشّرط:

بما أنّ $x = x(t)$ د.ت.م على $[\alpha,\beta]$ ← $\bigvee_{\alpha}^{\beta} x(t) < \infty$

بما أنّ $y = y(t)$ د.ت.م على $[\alpha,\beta]$ ← $\bigvee_{\alpha}^{\beta} y(t) < \infty$

← لنبرهن على

أنّ $\infty > l$ حيث:

$$l = \sup_{P\in \mathbb{P}[\alpha,\beta]} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k)-x(t_{k-1}))^2+(y(t_k)-y(t_{k-1}))^2}$$

لدينا وبما أنّ: x و y د.ت.م فإنّ:

$$\sum_{k=1}^{n} |y(t_k) - y(t_{k-1})| \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})|$$

وبالتالي:

$$\sqrt{(x(t_k)-x(t_{k-1}))^2+(y(t_k)-y(t_{k-1}))^2} \leq |x(t_k)-x(t_{k-1})| + |y(t_k)-y(t_{k-1})|$$

وبأخذ الـ $\sum$ للطرفين نجد:

$$L(P) \leq V(x(t), P) + V(y(t), P)$$

وبأخذ الـ sup للطرف الأيمن نجد:

$$L(P) \leq \overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}} x(t) + \overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}} y(t) < \infty$$

وبأخذ الـ sup للطرف الأيسر نجد:

$$l \leq \overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}} x(t) + \overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}} y(t) < \infty$$

$\Leftarrow$ k منحني مجمّع.

مثال تعليمي: بيّن أنّ المنحنيات التالية قابلة للتجميع وأوجد طول المنحني:

1) $k = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad ; \ t \in [0, 2\pi]$

$|x'(t)| = |-\sin t| \leq 1 \quad ; \quad t \in]0, 2\pi[$

$|y'(t)| = |\cos t| \leq 1 \quad ; \quad t \in]0, 2\pi[$

وبالتالي:

$\left.\begin{matrix} x(t) \text{ د.ت.م} \\ y(t) \text{ د.ت.م} \end{matrix}\right\}$ $\Leftarrow$ وبالتالي حسب جوردن فإنّ المنحني k هو منحني مجمّع، لنحسب طوله:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2 + y'^2} \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = \int_0^{2\pi} dt = [t]_0^{2\pi} = 2\pi$$

2) $k \begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases} \quad ; \ t \in [0, 2\pi]$

سيكلوئيد

الحل: نلاحظ أنّ:

$x(t)$ د.ت.م على المجال $[0, 2\pi]$ $\Leftarrow$ $|x'(t)| = |1-\cos t| \leqslant |1| + |\cos t| \leqslant 2$

$t \in]0, 2\pi[$

كما أنّ:

$y(t)$ د.ت.م على $[0, 2\pi]$ $\Leftarrow$ $|y'(t)| = |\sin t| \leqslant 1$

$t \in]0, 2\pi[$

وبالتالي حسب جوردن يكون المنحني K منحني مجمّع.

لنوجد طوله:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 . 2\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \left|\sin \frac{t}{2}\right| dt = 2\int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt = -4\left[\cos \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= -4[-1-1] = 8$$