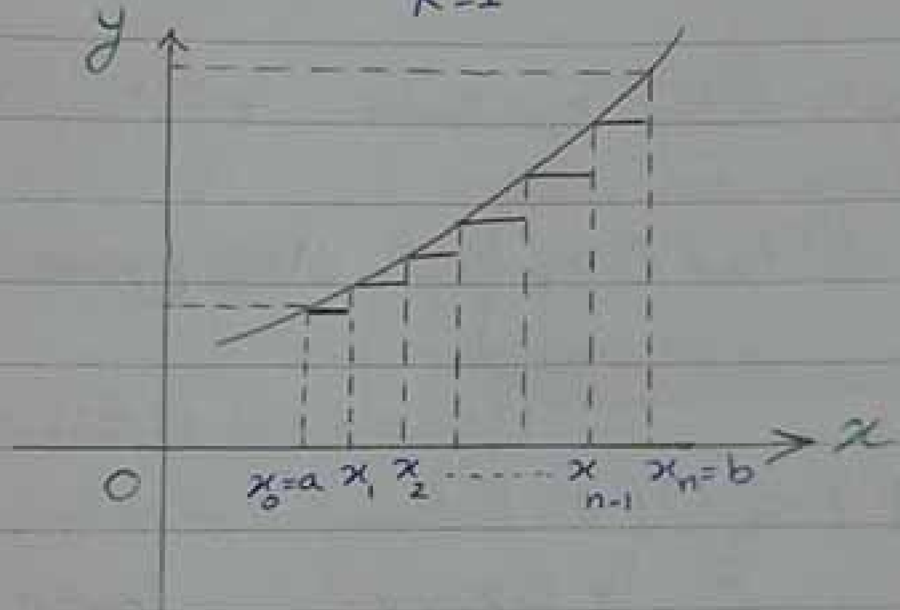
المحاضرة التاسعة الاثنين 14/4/2014

الموضوع: مقدمة في تكامل استلجس.

- مجموع ريمان.
- تكامل ريمان.
- مثال.

إذا كانت f دالة معرفة ومستمرة على $[a,b]$ ، $f(x)\geq 0$ والمطلوب إيجاد مجموع ريمان:

$$S(f,P)=\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k$$



$$\Delta x_k=\frac{b-a}{n}$$

الهدف الأساسي:

إيجاد المساحة المحصورة بين المنحنى $f(x)$ و $x=a$ و $x=b$ والمحور ox

$\Delta x_1 = x_1 - 0$ ، $\Delta x_2 = x_2 - x_1 \ldots\ldots$ $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$

$$\Delta x = \max_{1\leq k\leq n} \Delta x_k$$

تجزئ المجال $[a,b]$:

$$P=\{a=x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n=b \,;\, a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b\}$$

$$L(f,P)= f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_1)(x_2-x_1)+\ldots+f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})$$

$$\Rightarrow L(f,P)=\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\,\Delta x_k$$

وإذا كانت التجزئة نونية ومنتظمة فإن:

$$D = \lim_{n\to\infty} L(f,P) \quad \leftrightarrow \quad \Delta x_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$U(f,P) = f(x_1)(x_1 - x_0) + f(x_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(x_n)(x_n - x_{n-1})$$

$$\Rightarrow \quad U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot \Delta x_k$$

$$D = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n\to\infty}} U(f,P) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n\to\infty}} L(f,P)$$

$$S(f,P) = f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(t_n)(x_n - x_{n-1})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k}$$

مجموع ريمان

إذن :

$$L(f,P) \leq S(f,P) \leq U(f,P)$$

وعندما $\Delta x \to 0$ فإنّ :

$$D \leq \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n\to\infty}} S(f,P) \leq D$$

نقول عن الدالة المعرّفة والمستمرة على المجال $[a,b]$ إنّها قابلة للمكاملة (أو كمولة) حسب ريمان إذا وُجدَ $A \in \mathbb{R}$ يحقق ما يلي :

$$A = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k = \int_a^b f\,dx$$

ونرمز لـ A بـ : $\int_a^b f\,dx$ حيث :

$$t_k \in [x_{k-1}, x_k], \quad \Delta x = \max \Delta x_k, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

مثال تعليمي : احسب التكامل التالي باستخدام مجموع ريمان (تعريف التكامل):

I) $I = \int_{1}^{2} (x+1)\, dx$

II) $I = \int_{0}^{3} (x^2+1)\, dx$

حل المثال II :

$[a,b] = [0,3] \quad , f(x) = x^2+1$

وهو تابع مستمر على $[0,3]$ ،

$U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x_k$

لنأخذ التجزئة :

$P = \{ 0 = x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n = 3 \text{ و } x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_n \}$

إذا أخذنا التجزئة منتظمة متساوية بمعنى :

$\Delta x_k = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n} \Rightarrow$

$x_0 = 0, \; x_1 = x_0 + \Delta x = 0 + \frac{3}{n} = \frac{3}{n}$

$x_2 = x_1 + \Delta x = x_0 + 2\Delta x = 0 + 2\frac{3}{n} = 2\frac{3}{n}$

$\vdots$

$x_n = x_0 + n\frac{3}{n} = n\frac{3}{n} = 3$

نعوض الآن في القانون فنجد :

$U(f,P) = [\, f(x_1) + f(x_2) + \ldots\ldots + f(x_n) \,]\, \Delta x$

$= [\, f(\frac{3}{n}) + f(2\frac{3}{n}) + \ldots\ldots + f(n\frac{3}{n}) \,]\, \frac{3}{n}$

$= [\, (\frac{3}{n})^2 + 1 + (2\frac{3}{n})^2 + 1 + \ldots\ldots + (n\frac{3}{n})^2 + 1 \,]\, \frac{3}{n}$

$= \frac{3}{n} \left[(\frac{3}{n})^2 \{ 1 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2 \} + n \right.$

$= (\frac{3}{n})^3 \{ 1 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2 \} + 3$

$$= \left(\frac{3}{n}\right)^3 \left\{ \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \right\} + 3$$

$$= \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot (2n^2 + 3n + 1) + 3$$

$$= \frac{9}{2} \cdot \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} + 3$$

$$\rightarrow D = \lim_{n \to \infty} U(f, P) = \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{9}{2} \, \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} + 3 \right\}$$

$$= \frac{9}{2} \cdot 2 + 3 = 9 + 3 = 12$$

ملاحظة: مجاميع هامة يجب حفظها:

1) $\sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{(n+1)n}{2}$

2) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

3) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$