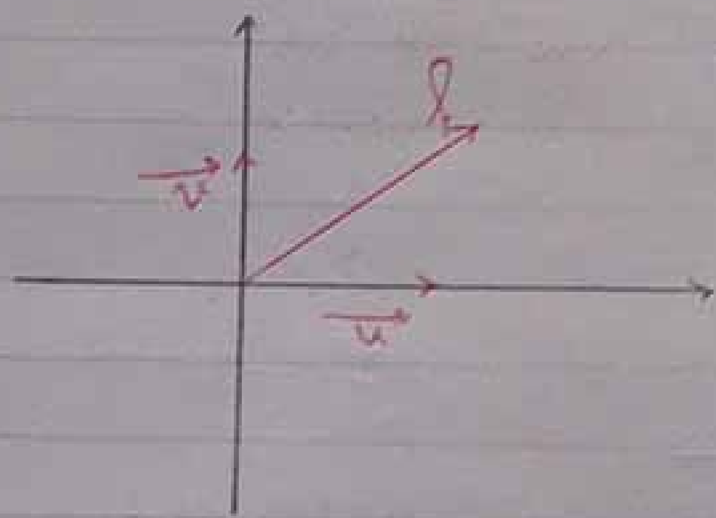
حل مجموعة السادسة ٢ / ١٤ / ٢٠١٤

مبرهنة: نقبل بدون البرهان ((Grippes جيبس))

ليكن $\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}$ ثلاثة أشعة غير معدومة وغير متوازية

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$$



ملاحظة: $\vec{f} = x.\vec{u} + y.\vec{v}$

مسقط الشعاع f على المحور $\vec{u}$ و $\vec{v}$ على الترتيب

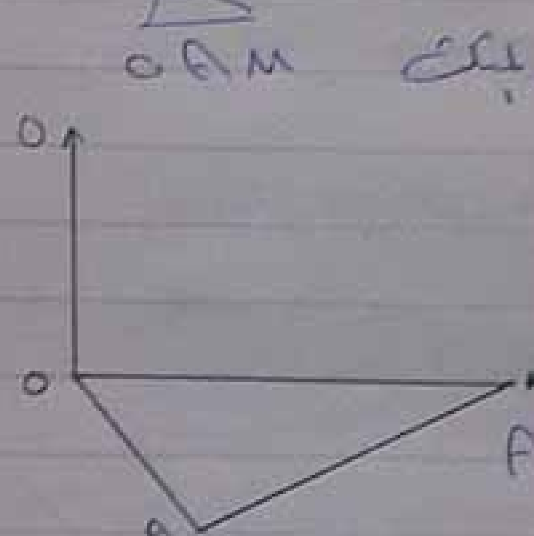
- ((العزم))

ملاحظة: الأشعة في حالة العزم مقيدة

- تعريف العزم: عزم شعاع $\vec{V}$ بالنسبة لنقطة O هو $(\vec{V}, O)$ ونقرأ ((العزم بالنسبة لـ O))

$$(\vec{V}, O) = \vec{OA} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ - & - & - \end{vmatrix}$$

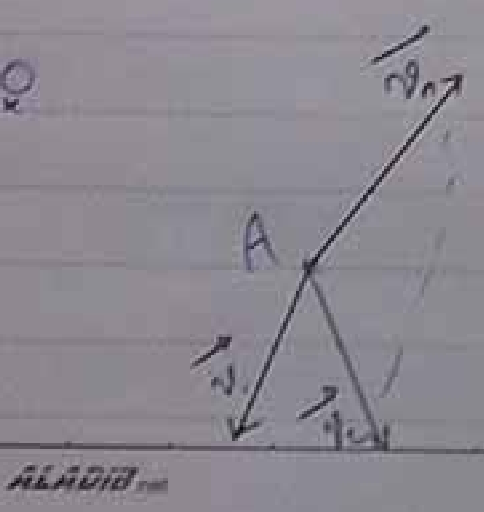
$(\vec{V}, O)$ هو شعاع طويلته = ضعف مساحة المثلث $\widehat{OAM}$



ملاحظة:

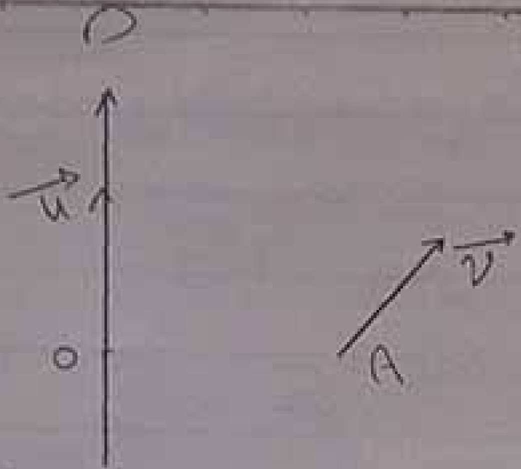
١- ان عزم شعاع بالنسبة لنقطة موجودة على حامله هو O ((الشعاع المعدوم)) لأن $\vec{OA} \parallel \vec{V}$

٢- ليكن $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \dots, \vec{V_n}$ أشعة مبدؤها A ولتكن O نقطة ما ولنرمز $\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \dots + \vec{V_n}$ وهو محصلة الأشعة $\vec{V_1}, \dots, \vec{V_n}$



$$(\vec{V}, O) = \vec{OA} \wedge \vec{V}$$
$$= \vec{OA} \wedge (\vec{V_1} + \vec{V_2} + \dots + \vec{V_n})$$
$$= \vec{OA} \wedge \vec{V_1} + \vec{OA} \wedge \vec{V_2} + \dots + \vec{OA} \wedge \vec{V_n}$$
$$= (\vec{V_1}, O) + (\vec{V_2}, O) + \dots + (\vec{V_n}, O)$$

عزم المحصلة يساوي مجموع العزوم



- عزم شعاع $\vec{v}$ بالنسبة لمستقيم Δ

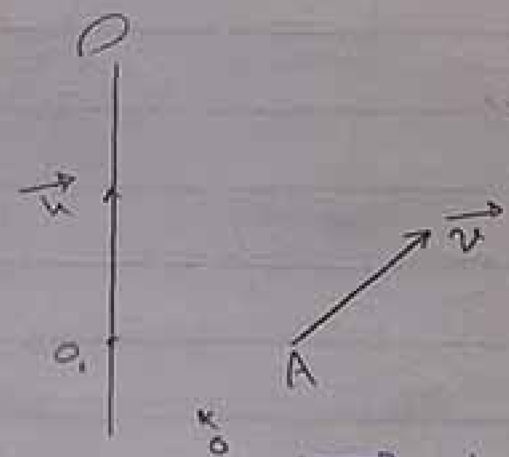
- ليكن $\vec{v}$ شعاع مبدأه A وليكن Δ مستقيم شعاع توجيهه $\vec{u}$ «هو شعاع واحدة»

عندها عزم $\vec{v}$ بالنسبة لـ Δ يعطى

$$(\vec{v},\Delta) = (\vec{u},\vec{OA},\vec{v}) = \begin{vmatrix} \text{مركبات } \vec{u} \\ \text{مركبات } \vec{OA} \\ \text{مركبات } \vec{v} \end{vmatrix}$$

ملاحظة:

إن شعاع $\vec{u}$ هو شعاع واحدة وإذا لم يكن شعاع واحدة نقسمه على الطويلة $\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$



$$(\vec{v},\Delta) = (\vec{u},\vec{O_1A},\vec{v})$$
$$= (\vec{u},\vec{O_1O}+\vec{OA},\vec{v})$$

ومن خواص الجداء المختلط

$$= (\vec{u},\vec{O_1O},\vec{v}) + (\vec{u},\vec{OA},\vec{v})$$
$$= (\vec{u}\wedge\vec{O_1O})\vec{v} + (\vec{OA},\vec{v},\vec{u})$$

«قمنا بتدويرها»

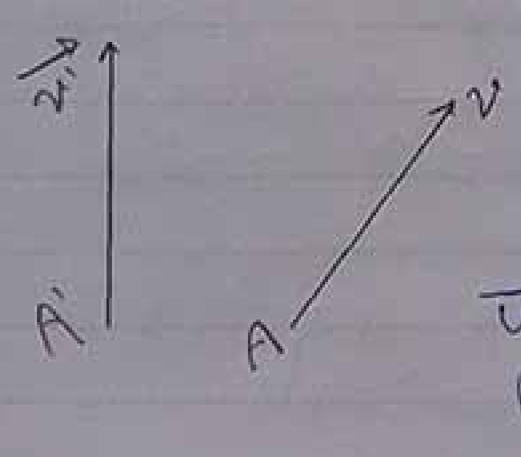
$$= -(\vec{u}\wedge\vec{O_1O})\vec{v} + (\vec{OA}\wedge\vec{v})\vec{u}$$
$$= +(\vec{OO_1}\wedge\vec{u})\vec{v} + (\vec{v},O)\vec{u}$$
$$(\vec{v},\Delta) = (\vec{u},O)\vec{v} + (\vec{v},O)\vec{u}$$

- العزم النسبي «[illegible]» بين شعاعين:

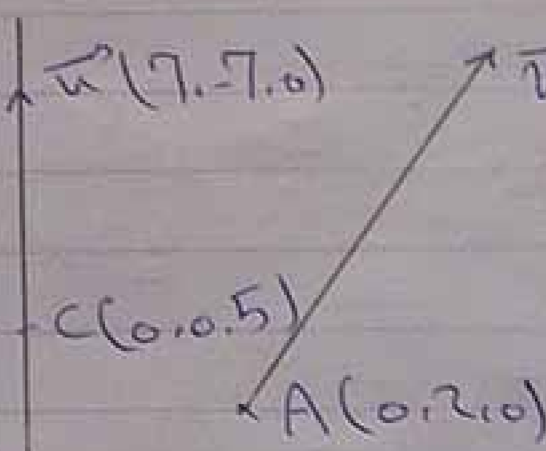
ليكن $\vec{v}$ شعاع مبدأه A، $\vec{v'}$ شعاع مبدأه A'

عندها العزم النسبي لـ $\vec{v},\vec{v'}$ هو:

$$(\vec{v},\vec{v'}) = (\vec{A'A},\vec{v},\vec{v'})$$



مثال: ليكن $\vec{v}(0,1,3)$ مبدأه $A(0,2,0)$ وليكن Δ مستقيم شعاع توجيهه $\vec{u}(7,-7,0)$ مبدأه $C(0,0,5)$ احسب العزم $(\vec{v},\Delta)$



الحل: ٢) نحول الشعاع $\vec{u}$ الى شعاع واحدة

$$|\vec{u}| = \sqrt{49+49+0} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

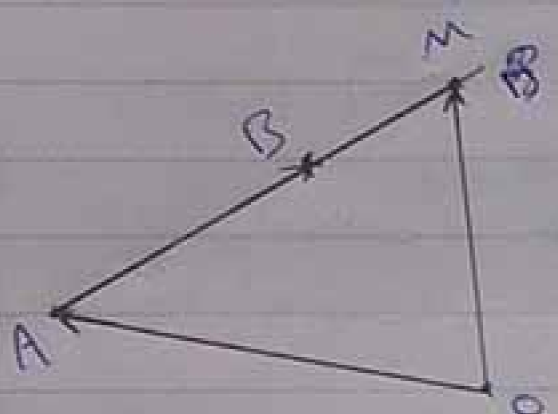
$$\vec{e_u} = \left(\frac{7}{7\sqrt{2}}, -\frac{7}{7\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad (10)$$

$$(\vec{v}, O) = (\vec{e_u}, \vec{CA}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(11)$$

- اذا أردنا الحساب فإننا نتبع الاتجاه الآتي من $\vec{u}$ الى C الى A الى v

المستقيم في الفراغ

- حساب معادلة مستقيم:



ليكن ما مستقيم يمر من نقطتين B, A ; ولتكن M(x,y,z) نقطة دائمة التحرك على ما.

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$$

$$\vec{X_L} = \vec{OA} + \lambda\vec{AB} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(x,y,z) = \vec{OA} + \lambda\vec{AB} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

ندعو $\vec{AB}$ شعاع توجيه المستقيم L.

مثال: أوجد معادلة المستقيم AB ، B(0,1,1) ، A(0,2,3) ، D(0,3,1) وهل D تنتمي للمستقيم.

$$\vec{X_L} = \vec{OA} + \lambda\vec{AB} ; \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow$$

$(x,y,z) = (0,2,3) + (0,-\lambda,-2\lambda)$

$(x,y,z) = (0, 2-\lambda, 3-2\lambda)$

$(0,3,1) = (0, 2-\lambda, 3-2\lambda)$

$\Longrightarrow 0 = 0$

$3 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = -1$; $\lambda \neq \lambda$

$1 = 3-2\lambda \Rightarrow \lambda = 1$

وكون لا توجد قيمة وحيدة لـ λ فإن $D \notin L$.