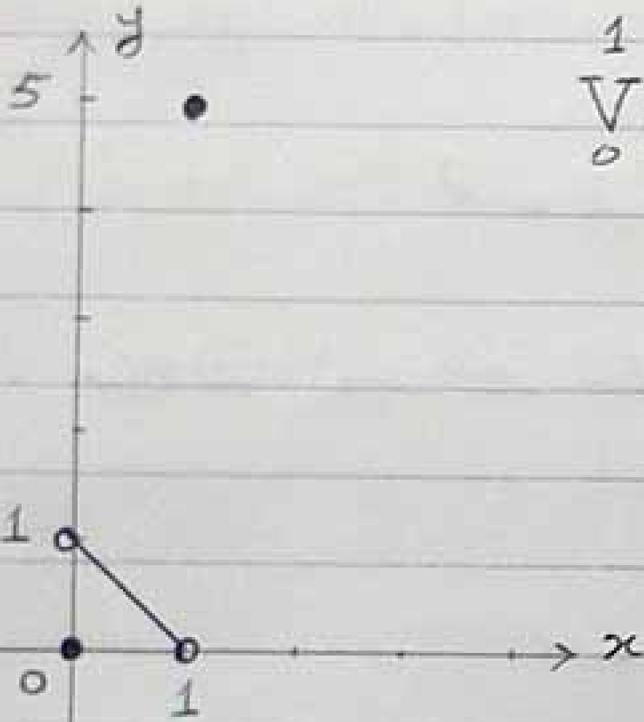
الموضوع: حل تمارين / د. ت. م /.

مثال (1): أوجد التغير الكلي للدالة f المعرفة على $[0,1]$ كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad x=0 \\ 1-x & ; \quad 0<x<1 \\ 5 & ; \quad x=1 \end{cases}$$

مع الرسم.



الحل: حسب التعريف لدينا:

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f = \sup_{P\in\mathbb{P}[0,1]} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

لنأخذ التجزئة التالية:

$$P=\{x_0=0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=1\}$$

$$V(f,P)=|f(x_1)-f(0)|+|f(x_2)-f(x_1)| + \dots + |f(x_n)-f(x_{n-1})|$$

$$=|1-x_1-0|+|1-x_2-(1-x_1)|+\dots+|5-(1-x_{n-1})|$$

لاحظ أن $0<x_1<1$ لاحظ أن $|-x_2+x_1|=|x_2-x_1|$

$$=1-x_1+x_2-x_1+x_3-x_2+\dots+x_{n-1}-x_{n-2}+4+x_{n-1}$$

موجب

$$=5-2x_1+2x_{n-1}=5+2(x_{n-1}-x_1)$$

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f = \sup_{P\in\mathbb{P}[0,1]} V(f,P)$$

الطريقة أولى:

$$=\sup_{P\in\mathbb{P}[0,1]} [5+2(x_{n-1}-x_1)] = 7$$

مع ملاحظة أن المقدار $(x_{n-1}-x_1)$ أكبر قيمة له هي (1)

طريقة ثانية: نعلم أنه:

$$P \subset P' \rightarrow V(f,P) \leqslant V(f,P')$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

نأخذ التجزئة:

$$P = \{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \frac{3}{n} < \dots < \frac{n-2}{n} < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\}$$

$$V f = \lim_{n\to\infty} \left[5 + 2\left(\frac{n-1}{n} - \frac{1}{n}\right)\right]$$

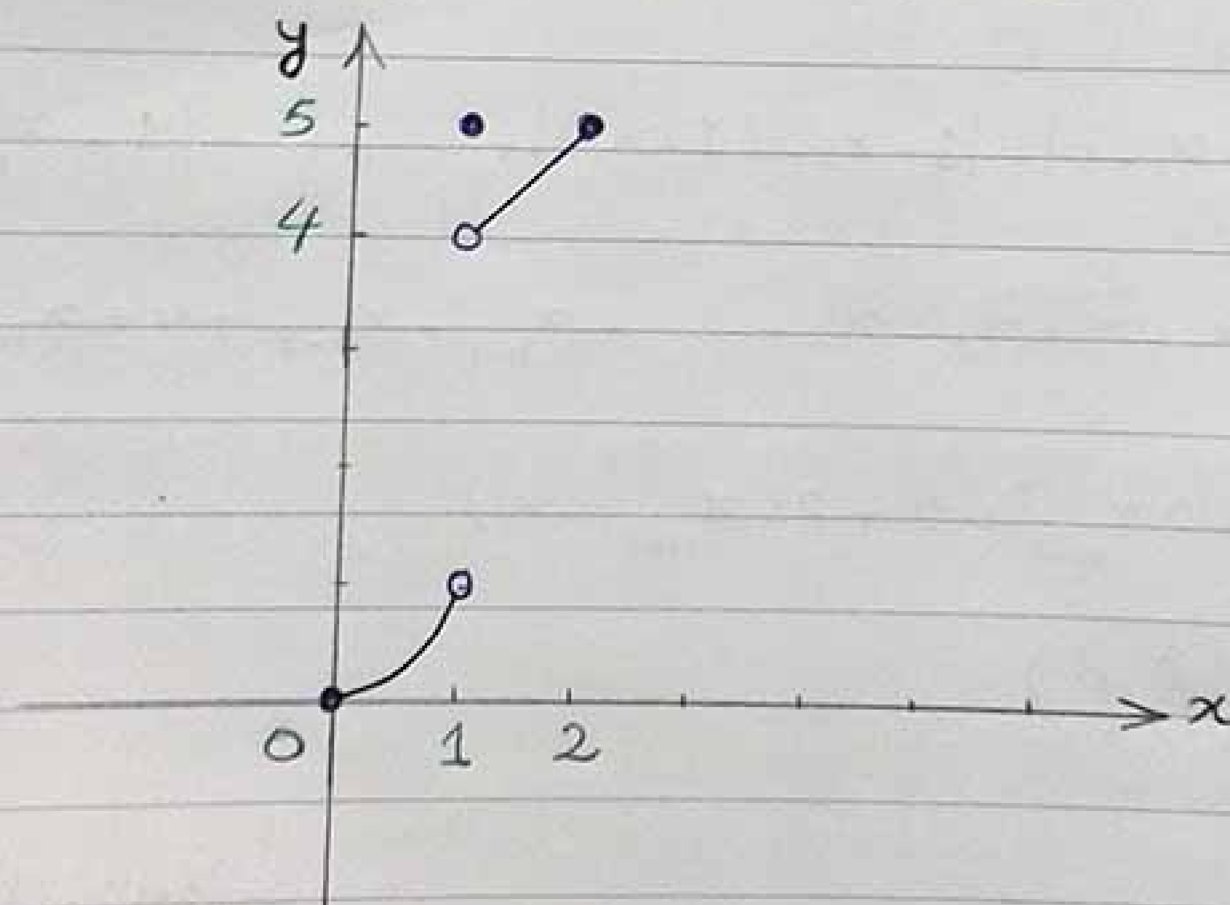
$$= \lim_{n\to\infty} \left[5 + 2\,\frac{n-2}{n}\right] = 5 + 2 = 7$$

مثال (2): أوجد التغير الكلي للدالة f المعرفة على $[0,2]$ كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{،} \quad 0 \leq x < 1 \\ 5 & \text{،} \quad x = 1 \\ x+3 & \text{،} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

مع الرسم.

الحل:



نأخذ التجزئة:

$$P_1 = \{0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1\}$$

ملاحظة: إن لم تنجح هذه التجزئة نأخذ التجزئة المنتظمة

نفرض :

$$\overset{2}{\underset{0}{V}} f = \overset{1}{\underset{0}{V}} f + \overset{2}{\underset{1}{V}} f$$

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} = \sup_{P_1} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$= \sup_{P_1} \left[|f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(x_n) - f(x_{n-1})| \right]$$

$$= \sup_{P_1} \left[|x_1^2 - 0| + |x_2^2 - x_1^2| + \cdots + |5 - x_{n-1}^2| \right]$$

$$V(f, P_1) = x_1^2 + x_2^2 - x_1^2 + x_3^2 - x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2 + 5 - x_{n-1}^2$$

$$= 5$$

$$\Rightarrow \overset{1}{\underset{0}{V}} f = \sup_{P_1} V(f, P_1) = 5$$

$$\overset{2}{\underset{1}{V}} f = \sup V(f, P_2)$$

لنأخذ التجزئة :

$$P_2 = \{x_0 = 1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 2\}$$

$$V(f, P_2) = |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

$$= |x_1 + 3 - 5| + |x_2 + 3 - x_1 - 3| + \cdots + |x_n + 3 - (x_{n-1} + 3)|$$

$$= 2 - x_1 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \cdots + x_n - x_{n-1}$$

$$= 4 - 2x_1$$

$$\overset{2}{\underset{1}{V}} f = \underset{P_2}{\sup}\,(4 - 2x_1) = 2$$

يجب أن تكون أقل ما يمكن

$$\rightarrow \overset{2}{\underset{0}{V}} f = 5 + 2 = 7$$

ملاحظة : اذا أخذنا تجزئة [illegible]

$$\Delta x = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow P_2 = \{1 = x_0 < x_1 = 1 + \frac{1}{n} < \cdots < 2\}$$

نضع

$$\overset{2}{\underset{1}{V}} f = \lim_{n \to \infty} [4 - 2(1 + \frac{1}{n}) = 4 - 2 = 2$$

انتهت المحاضرة الخامسة