المحاضرة الثالثة   الاثنين 24/3/2014

الموضوع: الدوال ذات التغير المحدود (د. ت. م).

- تعريف د. ت. م: تم في المحاضرة الثانية.
- ملاحظات
- تتمات للتعريف:
- خواص الدوال ذات التغير المحدود.

- ملاحظات:

① $V(f,P) \le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ واضح من التعريف.

② التجزئة الأدق: تعريف: نقول عن P' إنها تجزئة أدق من التجزئة P إذا كان:

$$P' \supset P$$

مثال: لتكن لدينا التجزئة للمجال $[a,b]$ ولتكن:

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \dots\dots < x_n = b\}$$
$$P' = \{a = x_0 < x_1 < \dots\dots < x_i < x' < x_{i+1} < \dots < x_n = b\}$$

عندئذٍ P' أدق من P.

مثال: لتكن لدينا التجزئات الثلاث التالية للمجال $[0,1]$:

$$P = \{0, \tfrac{1}{2}, 1\},\ P' = \{0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, 1\},\ P'' = \{0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}, 1\}$$

نستنتج أنه إذا كان لدينا P, P' تجزئتان للمجال $[a,b]$ بحيث:

$P' \supset P$ (P' أدق من P) عندئذٍ:

$$V(f,P) \le V(f,P')$$

البرهان:

$$V(f,P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$= |f(x_1) - f(x_0)| + \dots + |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + \dots + |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

$$= |f(x_1) - f(x_0)| + \dots\dots + |f(x_{i+1}) - f(x') + f(x') - f(x_i)|$$
$$+ \dots\dots + |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

وحسب خواص القيمة المطلقة نستطيع أن نكتب:

$$V(f,P) \leq \cdots\cdots + |f(x_{i+1}) - f(x')| + |f(x') - f(x_i)| + \cdots$$

$\rightarrow$

$$V(f,P) \leq V(f,P')$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \lim \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})$$ ③

تذكرة: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

للبرهان: نقوم بحساب متتالية المجاميع الجزئية ثم نحسب نهايتها مع ملاحظة أن:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

④ إذا كانت f دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$ فإن f دالة ذات تغير محدود على أي مجال جزئي مغلق منه أي:

$$[a',b'] \subset [a,b]$$

$$V(f,P') \leq V(f,P)$$

$$\Rightarrow \overset{b'}{\underset{a'}{V}} (f) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}} (f) < +\infty$$

- تتمات حول التعريف:

I) نقول عن دالة f إنها ذات تغير محدود على المجال $[a,+\infty[$ إذا كانت f دالة ذات تغير محدود على أي مجال جزئي مغلق منه.

$$[a,A] \subset [a,+\infty[$$

$$\rightarrow \overset{+\infty}{\underset{a}{V}} f = \sup_{A>a} \{ \overset{A}{\underset{a}{V}} f \} < +\infty$$

II) نقول عن الدالة f أنها ذات تغير محدود على المجال $]-\infty,b]$ إذا كانت f ذات تغير محدود على أي مجال جزئي مغلق منه.

$$[B,b] \subset]-\infty,b]$$

$$\rightarrow \overset{b}{\underset{-\infty}{V}} f = \sup_{b>B} \{ \overset{b}{\underset{B}{V}} f \} < +\infty$$

III) نقول عن الدالة f أنها ذات تغير محدود على $]-\infty, +\infty[$ إذا كانت f دالة ذات تغير محدود على أي مجال مغلق منه.

$[A,B] \subset]-\infty,+\infty[$

$$\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{V}} f = \sup_{\substack{A<0 \\ A>0}} \{ \overset{B}{\underset{A}{V}} f \}$$

- خواص الدوال ذات التغير المحدود:

1) إذا كانت الدالة f ذات تغير محدود على $[a,b]$ فإنها محدودة ولكن العكس غير صحيح بالضرورة.

الإثبات: لنفرض أن f د.ت.م على $[a,b]$ ← نأخذ التجزئة:

$$P = \{a, x, b\}$$

$$\Rightarrow V(P,f) = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq \overset{b}{\underset{a}{V}} f < +\infty$$

$$|f(x)| = |f(x) - f(a) + f(a)|$$
$$\leq |f(x) - f(a)| + |f(a)|$$
$$\leq M + f(a) = L$$

وبالتالي الدالة f محدودة.

بالنسبة لبرهان العكس موجود كتمرين في المحاضرة الثانية.

2) إذا كانت f دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$ فإن:

I) $|f(x)|$ د.ت.م على $[a,b]$ والعكس غير صحيح بالضرورة.

II) $\psi = \alpha f$ د.ت.م على $[a,b]$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$

III) $\psi = \frac{1}{f}$ د.ت.م على $[a,b]$ حيث $f \neq 0$

3) إذا كانت f و g دالتين كل منهما ذات تغير محدود على $[a,b]$ فإن:

I) $\psi = f \mp g$ د.ت.م على $[a,b]$

II) $\psi = f.g$ د.ت.م على $[a,b]$

III) $\frac{f}{g} = \psi$ د.ت.م حيث $g \neq 0$

هامة جداً

٤) إذا كانت f د.ت.م على المجال $[a,b]$ وكانت $a<c<b$ فإن f د.ت.م على المجالين $[c,b] \wedge [a,c]$ وبالعكس إن العلاقة التالية :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f$$ صحيحة

تمارين :

مثال (١) : أوجد التغير الكلي للدالة f على $[0,1]$ المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x=0 \\ 1-x & , \quad 0<x<1 \\ 5 & , \quad x=1 \end{cases}$$

مع الرسم

مثال (٢) : أوجد التغير الكلي للدالة f المعرفة على المجال $[0,2]$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 5 & , \quad x=1 \\ x+3 & , \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

مع الرسم

انتهت المحاضرة الثالثة

DABBAGH STATIONERY