تمرين: أثبت أن عدد المسارات من $(0,0)$ إلى (m,n) هو:

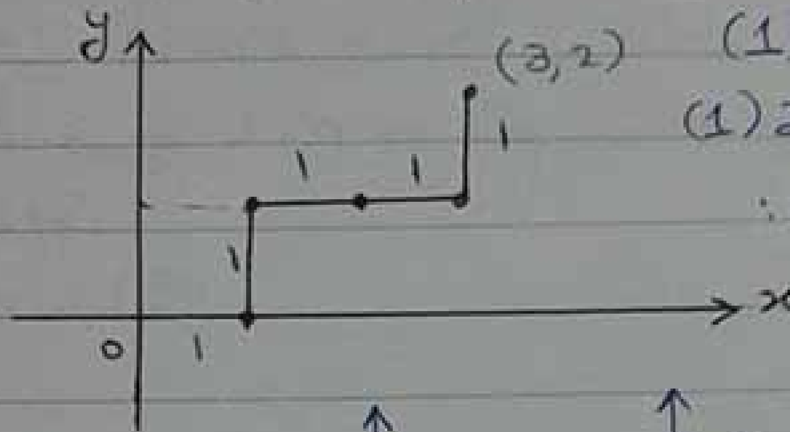
$$\binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{m}$$

الحل: للتوضيح: لنأخذ المسار التالي من $(0,0)$ إلى $(3,2)$

إذا رمزنا لكل حركة أفقية بمسافة (1)

بـ $\rightarrow$ ولكل حركة عمودية بمسافة (1)

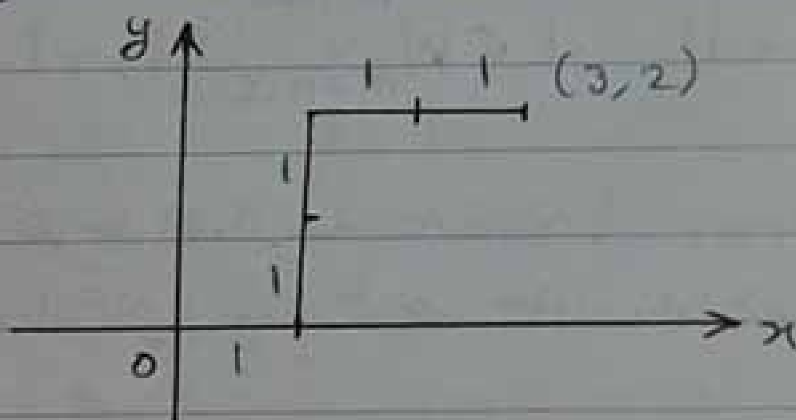
بـ $\uparrow$ فالمسار السابق يقابل:



$$\rightarrow\ \uparrow\ \rightarrow\ \rightarrow\ \uparrow \in W_5^{3,2}(\{\rightarrow,\uparrow\})$$

كذلك فإن كل كلمة من مجموعة $W_5^{3,2}(\{\rightarrow,\uparrow\})$ ستمثل (ستقابل) مسار وحيد.

مثال آخر: الكلمة: $\rightarrow\ \uparrow\ \uparrow\ \rightarrow\ \rightarrow$ تمثل المسار التالي:



وبشكل عام يوجد تقابل بين مجموعة كل المسارات من $(0,0)$ إلى (m,n) ومجموعة الكلمات:

$$W_{m+n}^{n,m}(\{\uparrow,\rightarrow\}) = W_{m+n}^{m,n}(\{\rightarrow,\uparrow\})$$

وبالتالي فإن عدد المسارات من $(0,0)$ إلى (m,n) يساوي:

$$\text{card}\, W_{m+n}^{m,n}(\{\rightarrow,\uparrow\}) = \frac{(m+n)!}{m!\cdot n!} = \binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$$

طريقة أخرى: يمكن رد المسألة السابقة إلى مسألة اختيار n شيء من $m+n$ شيء وهو:

$$\binom{m+n}{n}$$

تمرين : أثبت أنه $\forall\ 1 \le k \le m,n$ فإنه :

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$$

$$= \binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \cdots\cdots + \binom{m}{k-1}\binom{n}{1} + \binom{m}{k}\binom{n}{0}$$

الحل: لتكن $A=\{a_1,\dots\dots,a_m\}$ و $B=\{b_1,\dots\dots,b_n\}$

$\Rightarrow m+n = |A\cup B|$

إذاً $\binom{m+n}{k}$ = عدد المجموعات الجزئية من $A\cup B$ والتي تحوي k عنصر ويساوي :

عدد المجموعات الجزئية من $A\cup B$ والتي تحوي 0 عنصر من A و k عنصر من B + عدد المجموعات الجزئية من $A\cup B$ والتي تحوي 1 عنصر من مجموعة A و $k-1$ عنصر من B + ... + عدد المجموعات الجزئية من $A\cup B$ والتي تحوي i عنصر من مجموعة A و $k-i$ عنصر من مجموعة B حيث $(i \in \{0,\dots\dots,k\})$ + ... + عدد المجموعات الجزئية من $A\cup B$ والتي تحوي k عنصر من A و 0 عنصر من B .

$$\Rightarrow \binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$$

طريقة ثانية للحل : $(1+x)^m = \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}x^i$, $(1+x)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j$

$$(1+x)^{m+n} = (1+x)^m \cdot (1+x)^n$$

$$= \left[\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}x^i\right]\cdot\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j\right]$$

أمثال x^k في الطرف اليساري هو $\binom{m+n}{k}$ $\forall\ 1\le k\le m,n$ وأمثال x^k في الطرف اليميني هي :

$$\star = \sum_{\substack{0\le i\le m\\ 0\le j\le n}}\binom{m}{i}\binom{n}{j} \quad ; \quad i+j=k \Rightarrow j=k-i$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$$

وهو المطلوب

تمرين: أوجد:

$$card(A) = card\{(x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{N}^k ,\ 1 \le x_1 < x_2 < \dots < x_k < n\} \quad k,n \in \mathbb{N}^*$$

الحل:

إذا كان $n < k \Leftarrow card(A) = 0$

إذا كان $n = k \Leftarrow card(A) = 1$

إذا كان $k = n-1$ لكان $card(A) = n-1$

توضيح: $n = 10 ,\ k = 3$

$$1 \le x_1 < x_2 < x_3 \le 10$$

$\{1,2,\dots,10\} \xrightarrow[\text{عناصر}]{\text{اختيار } 3} 9 , 5 , 7$ ثم ترتيبها تصاعدياً $5,7,9$

وذلك يتم بطريقة وحيدة.

نسحب من عناصر المجموعة $\{1,2,\dots,n\}$ k عنصر وذلك يتم ب $\binom{n}{k}$ طريقة ثم نرتب هذه الأعداد تصاعدياً بطريقة وحيدة فنحصل على:

$$1 \le x_1 < x_2 < \dots < x_k \le n$$

وبالتالي:

$$card(A) = \binom{n}{k}$$

تمرين: أثبت دون استخدام الاستقراء الرياضي أو الحساب المباشر أنه:

$$\forall\ 1 \le k \le n : \quad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

توجيه: قم بتوزيع كرة بيضاء و $k-1$ كرة سوداء على n صندوق بحيث أن كل صندوق يحوي كرة على الأكثر.

انتهت المحاضرة الخامسة

S.ARBASH STATIONERY