المحاضرة السابعة

٢١ / ٢ / ٢٠١٤م

تثليث مؤثر خطي ومصفوفة

رمن :

تعريف: ليكن V فضاء متجهات معرف على حقل F وبعده n ، $L: V \longrightarrow V$ مؤثراً خطياً.

- ماثلوث اذا كان للمؤثر L مصفوفة مثلثية بالنسبة لقاعدة مرتبة في V ،

$A \in M_n(F)$ ، A تلوثة اذا كانت تشابه مصفوفة مثلثية.

- أو اذا كان $L: F^n \longrightarrow F^n$ قابل للتثليث حيث L معرف بالمصفوفة A.

مبرهنة: ليكن V فضاء متجهات معرف على حقل F وبعده n و $L: V \longrightarrow V$ مؤثراً خطياً. ماثلوث اذا وفقط اذا كانت $P_L(x)$ الحدودية المميزة للمؤثر L ، $P_A(x)$ مفرقة الى جداء أقواس من الدرجة الأولى

أي: ماثلوث $\Longleftrightarrow$ $P_L(x) = (x-\lambda_1)^{P_1} \cdots\cdots (x-\lambda_m)^{P_m}$

$\sum_{i=1}^{m} P_i = n$ ؛

ليست مفرقة يوجد x^2 $\longrightarrow$ $(x-1)(x^2-2)$

مثال: ليكن $L: R^3 \longrightarrow R^3$ مؤثراً خطياً

$$L(x,y,z) = (x+y, -2x-y, 3z)$$

1- أوجد الحدودية المميزة والأصغرية
2- عين القيم الذاتية والمتجهات الذاتية
3- عين القاعدة الذاتية إن وجدت
4- ناقش فيما اذا كان L قطور.

الحل: مصفوفة L بالنسبة للقاعدة القانونية

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P_L(x) = \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 2 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix}$$

$$P_L(x) = (x-3)(x^2-1+2) = (x-3)(x^2+1)$$

انه L ليس ثلوث لأن الحدودية المميزة لا تكتب على جداء أحاديات من الدرجة الأولى.

ملاحظة: $L: C^3 \longrightarrow C^3$

$$P_L(x) = (x-3)(x-i)(x+i)$$

ثلوث لأنه معرف على C أساساً، بالمثال السابق معرف على R، لا يمكن تفريق الحدودية (x^2+1) على R ولكن على C يمكن.

مثال: $L: R^3 \longrightarrow R^3$

$$L(x,y,z) = (x-y+z, y-z, 2z)$$

1- أوجد الحدودية المميزة والأصغرية والقيم الذاتية والمتجهات الذاتية
2- ناقش فيما اذا كان L ثلوث، قطور، قطر المؤثر L ان أمكن

((لا يمكن))

الحل :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_L(x)=\det(xI-A)$$

$$=\begin{vmatrix} x-1 & +1 & -1 \\ 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix}=(x-1)(x^2-2x-x+2)$$

$$=(x-1)(x^2-3x+2)$$

$$=(x-1)^2(x-2)$$

- بما أن الحدودية الأصغرية تقسم الحدودية المميزة فيكون لها الشكل

$$q_L(x)=(x-1)^{r_1}(x-2)^{r_2}$$

$r_2=0,1$ $\qquad$ $r_1=0,1,2$

$r_1=1,\ r_2=1 \Leftarrow (A-I)(A-2I)=0$

نبدأ من الأصغر $r_1=1$ لأنها أصغرية ومنه $q_L(x)=(X-1)(X-2)$

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=2$$

$$L(v)=\lambda(v)\Rightarrow(x-y+z,\ y-z,\ 2z)=(\lambda x,\ \lambda y,\ \lambda z)$$

$$\left.\begin{aligned}(1-\lambda)x-y+z&=0\\(1-\lambda)y-z&=0\\(2-\lambda)z&=0\end{aligned}\right\}$$

- من أجل $\lambda=1 \Leftarrow$

$$\left.\begin{aligned}-y+z&=0\\-z&=0\\z&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

يوجد عدد غير منتهي من المتجهات الذاتية المقابلة للقيمة الذاتية $\lambda_1=1$ ، $v=(x,0,0)$

نختار منها $v_1=(1,0,0)$

L - تثليثي لأن الحدودية المميزة تكتب على شكل جداء أقواس من الدرجة الأولى.

- من أجل $\lambda_2=2 \Leftarrow$

$$-x-y+z=0\Rightarrow -x-y-y=0$$

$$-y-z=0\Rightarrow z=-y$$

$$0=0$$

$\Rightarrow x=-2y \Longrightarrow$ يوجد عدد غير منتهي من المتجهات الذاتية المقابلة للقيمة الذاتية $v=(-2y,y,-y)$ نختار منها $v_2=(-2,1,-1)$

أي لا توجد قاعدة ذاتية وبالتالي L غير قابل للتقطير.

من أجل $\lambda_2 = -1$ نعوض

$$2x - y - z = 0 \quad \text{--- } ①$$
$$-x + 2y - z = 0 \quad \text{--- } ②$$
$$-x - y + 2z = 0 \quad \text{--- } ③$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 3y = 0 \Rightarrow x = y \\ -y - y + 2z = 0 \Rightarrow z = y \end{array}\right\} \Rightarrow x = y = z$$

$$v = (x, x, x)$$

أي λ_2 تقابل عدد غير نهائي من المتجهات الذاتية $v = (x, x, x)$

نختار منها من أجل $x = 1$ $\quad v_3 = (1, 1, 1)$

- وبالتالي تكون القاعدة الذاتية $B = \{v_1, v_2, v_3\}$

وبحساب المحدد نجد أن المحدد $\left| \quad \right| \neq 0$

وتكون مستقلة خطياً

وعدد عناصرها $= 3 = \dim R^3$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

انتهت المحاضرة