بالمحاضرة السابقة 2014 / 3 / 24

ليكن v شعاع ذاتي يقابل λ_1, λ_2 قيمتين ذاتيتين

$$\left.\begin{array}{l} L(v) = \lambda_1 v \\ L(v) = \lambda_2 v \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = \lambda_1 v - \lambda_2 v \Rightarrow 0 = (\lambda_1 - \lambda_2) v$$

$$\xrightarrow{v \neq 0} \lambda_1 = \lambda_2$$

مبرهنة - (Cayley-Hamilton):
ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل F وبعده n و
$L : V \longrightarrow V$ مؤثراً خطياً
λ قيمة ذاتية للمؤثر L $\Longleftrightarrow$ λ صفر للحدودية المميزة $P_L(x)$

الإثبات:
λ: $P_L(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \det(\lambda I - A) = 0 \Longleftrightarrow$
$\exists 0 \neq v \in V : (\lambda I - A) v = 0 \Longleftrightarrow \exists 0 \neq v \in V :$
$A v = \lambda v \Longleftrightarrow \exists 0 \neq v \in V : L(v) = \lambda v \Longleftrightarrow$
λ قيمة ذاتية.

تمرين: لتكن A مصفوفة مربعة $A \in M_n(F)$ إذا كانت $P_A(x)$ لا تملك أصفاراً في الحقل F فإن A لا تملك قيم ذاتية.

ملاحظة: λ قيمة ذاتية لـ A إذا كانت $\lambda I - A$ غير قابلة للقلب أي
$\det(\lambda I - A) = 0$

تعريف: لتكن $0 \neq A \in M_n(F)$ نعرف القيمة الذاتية للمصفوفة A بأنه $0 \neq v \in F^n$ بحيث $A v = \lambda v$ ونسمي λ قيمة ذاتية مقابلة لـ v.

مبرهنة: لتكن $A \in M_n(F)$ ، $q_A(x) , P_A(x)$ الحدوديتين المميزة والأصغرية لـ A على الترتيب λ صفر لـ $P_A(x) \Longleftrightarrow$ λ صفر لـ $q_A(x)$.

ALAUIB

/ /

بالعكس ⇐ $p_A(\lambda)=0$ ⇐ λ قيمة ذاتية وذلك حسب مبرهنة (Cayley-Hamilton)

$0 = q_A(A)v = q_A(\lambda)v$

$\overset{v\neq 0}{\Longrightarrow} q_A(\lambda)=0 \Rightarrow$ λ صفر لـ $q_A(x)$

موضح في آخر الدفتر

$\Longrightarrow$: $q_A(x)$ تقسم $p_A(x)$ فإنه

$\exists\, m(x) : p_A(x) = m(x)\, q_A(x)$

$p_A(\lambda) = m(\lambda)\, q_A(\lambda) = 0 \Rightarrow p_A(\lambda)=0 \Rightarrow$

λ صفر للحدودية $p_A(x)$.

مثال: ليكن $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : L$ مؤثراً خطياً.

$L(x,y,z) = (x-y-z,\ y-x-z,\ z-x-y)$

١- أوجد الحدودية المميزة والأصغرية للمؤثر L.

٢- أوجد القيم الذاتية للمؤثر L ثم عين المتجهات الذاتية المقابلة لها.

٣- عين قاعدة ذاتية للمؤثر L إن وجدت.

٤- أوجد مصفوفة L بالنسبة للقاعدة الذاتية إن وجدت.

الحل: مصفوفة L بالنسبة للقاعدة القانونية

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_L(x) = \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)(x^2-2x+1-1) - (x-1-1) + (1-x+1)$$

$$= x(x-2)(x-1) - (x-2) - (x-2) = (x-2)(x^2 - x - 2)$$

$$\Longrightarrow \boxed{P_L(x) = (x-2)^2 (x+1)}$$

بما أن $q_A(x)$ تقسم الحدودية المميزة فيكون لها الشكل:

$$q_L(x) = (x-2)^{r_1} (x+1)^{r_2} \quad ; \; r_1 = 1, 2, \quad r_2 = 1$$

$$q_L(x) = (x-2)(x+1) \qquad r_1 = 1$$

$$(A - 2I)(A + I) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{q_L(x) = (x-2)(x+1)}$$

2. حسب مبرهنة (Cayley-Hamilton) أصفار الحدودية المميزة هي قيم ذاتية وبالتالي: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$ ← مضاعف

$$0 \neq v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$L(v) = Av = \lambda v \quad \Longrightarrow (x - y - z, \; +y - x - z, \; z - x - y) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (1-\lambda) x - y - z = 0 \\ -x + (1-\lambda) y + z = 0 \\ -x - y + (1-\lambda) z = 0 \end{cases}$$

جملة معادلات خطية متجانسة لها حل غير صفري إذا وفقط إذا كان محدد الأمثال يساوي الصفر.

- $\lambda_1 = 2$

$$-x - y - z = 0$$

$$\Longrightarrow x = -y - z \Longrightarrow v = (-y - z, y, z)$$

أي λ تقابل عدد غير منتهي من المتجهات الذاتية ونختار منها من أجل $v = (-y - z, y, z)$

$y = 1 \quad v_1 = (-1, 1, 0)$

$z = 1 \quad v_2 = (-1, 0, 1)$

من أجل $\lambda_2 = -1$ نعوض

$$2x - y - z = 0 \quad \text{---} ①$$
$$-x + 2y - z = 0 \quad \text{---} ②$$
$$-x - y + 2z = 0 \quad \text{---} ③$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 3y = 0 \Rightarrow x = y \\ -y - y + 2z = 0 \Rightarrow z = y \end{array}\right\} \Rightarrow x = y = z$$

$v = (x, x, x)$

$v = (x, x, x)$ أي λ_2 تقابل عدد غيرمنتهي من المتجهات الذاتية

نأخذ منها من أجل $x = 1$ $\quad v_3 = (1, 1, 1)$

- وبالتالي تكون القاعدة الذاتية $B = \{v_1, v_2, v_3\}$

وبحساب المحدد نجد أن المحدد $\neq 0$ $\quad \left| \quad \right| \neq 0$

وتكون مستقلة خطياً

وعدد عناصرها $= 3 = \dim R^3 \Leftarrow$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

انتهت المحاضرة