E- Mail: Mimozeyn@yahoo.com

11 / 3 /2013-2014

* مبرهنة كانتور - برنشتاين

لتكن A,B مجموعتين بحيث أن: $Card(A) \leq Card(B)$ و $Card(B) \leq Card(A)$

عندئذٍ يكون $Card(A) = Card(B)$

الإثبات:

حسب الفرض: $Card(A) \leq Card(B)$ إذاً يوجد تطبيق متباين $f : A \longrightarrow B_1 \subseteq B$

$Card(B) \leq Card(A)$ إذاً يوجد تطبيق متباين $\varphi : B \longrightarrow A_1 \subseteq A$

وبما أن $B_1 \subseteq B$ فإن:

$$\varphi|_{B_1} : B_1 \longrightarrow A_2 \subseteq A_1 \subseteq A = A_0$$

$\varphi|_{B_1}$ مقصور φ على B_1 متباين لأن φ متباين

وغامر حيث $Im\, \varphi|_{B_1} = A_2$

ومنه نحصل على التطبيق المتباين الآتي:

$$\psi = \varphi|_{B_1} \circ f : A \longrightarrow A_2$$

من الواضح أن ψ تقابل

حيث: $A \xrightarrow[\text{وفق } f]{\text{تقابل}} B_1 \xrightarrow[\text{وفق } \varphi|_{B_1}]{\text{تقابل}} A_2$ $\quad (Im f = B_1)$

$\varphi|_{B_1} \circ f = \psi$ تقابل وفق $\qquad \psi(A_0) = A_2$

ومنه نحصل على السلسلة الآتية:

$$A = A_0 , A_1 , A_2 , A_3 = \psi(A_1) , A_4 = \psi(A_2) , \dots\dots , A_n = \psi(A_{n-2}) , \dots\dots$$

حيث : $A=A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$

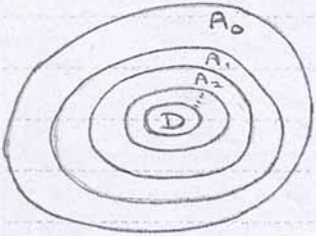
- لنفرض أن : $D=\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$ (تقاطع جميع المجموعات A_i)

عندئذٍ يمكننا أن نكتب :

$$A_0 = D \cup [(A_0-A_1)\cup(A_1-A_2)\cup(A_2-A_3)\cup \dots\dots] \quad (1)$$

$$A_1 = D\cup[(A_1-A_2)\cup(A_2-A_3)\cup(A_3-A_4)\cup\dots\dots] \quad (2)$$

والبرهان على ذلك كما يلي :



بالنسبة للعلاقة (1) :

من الواضح أن الطرف الأيمن محتوى في الطرف الأيسر

(حيث $D=\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \subseteq A_0$ "التقاطع محتوى في أي مجموعة مشكلة له"

كما أن $A_0 \supseteq A_0 - A_1$ و $A_0 \supseteq A_1$ ومنه $A_0 \supseteq A_1 - A_2$ وهكذا ......)

بالاتجاه المعاكس :

ليكن $a\in A_0$ عندئذٍ توجد حالتان :

الحالة الأولى : a ينتمي إلى جميع المجموعات A_i ; $(\forall i\in\mathbb{N})$ ومنه فإن

$a\in\bigcap_{i=0}^{\infty}A_i = D$ إذاً $a\in D$ وبالتالي a ينتمي إلى الطرف الأيمن.

الحالة الثانية : يوجد i_0 في $\mathbb{N}$ بحيث يكون $a\notin A_{i_0}$

ومنه يمكننا أن نفترض أن A_k هي أول مجموعة تحقق الشرط $a\notin A_k$

ومنه فإن $a\in A_{k-1}$ (حيث $A_k\subseteq A_{k-1}$) $(0<k\le i_0)$

إذاً : $a\in(A_{k-1}-A_k)$

ومنه فإن a ينتمي إلى الطرف الأيمن

- إذاً في كلتا الحالتين يكون a ينتمي إلى الطرف الأيمن ومنه الأيسر محتوى في الأيمن.

مما سبق نجد أن الطرفين متساويان والعلاقة (1) صحيحة.

وبطريقة مشابهة يتم إثبات العلاقة (٢)

(ملاحظة جانبية :

في كل من (١) و (٢) المجموعات في الطرف الأيمن منفصلة مثنى مثنى، مثلاً

$(A_1 - A_2)$ و $(A_0 - A_1)$ منفصلتان لأن

$$a \in (A_0 - A_1) \rightarrow a \in A_0 ,\ \underline{\underline{a \notin A_1}} \rightarrow a \notin (A_1 - A_2)$$

$$(\, b \notin (A_0 - A_1) \leftarrow \underline{\underline{b \in A_1}} ,\ b \notin A_2 \leftarrow b \in (A_1 - A_2)$$

بالعودة إلى الإثبات :

- وبملاحظة أن المجموعات المذكورة في كل من (١) و (٢) غير متقاطعة مثنى مثنى،

يمكننا بعد فرض :

الفرديات أولاً

$$S = D \cup (A_1 - A_2) \cup (A_3 - A_4) \cup (A_5 - A_6) \cup \ldots\ldots$$

الزوجيات ثانياً

أن نكتب الآتي :

$$A_0 = S \cup [(A_0 - A_1) \cup (A_2 - A_3) \cup (A_4 - A_5) \cup \ldots\ldots]$$

$$A_1 = S \cup [(A_2 - A_3) \cup (A_4 - A_5) \cup (A_6 - A_7) \cup \ldots\ldots]$$

(ولازالت المجموعات هنا منفصلة)

ومنه نحصل على التقابل الآتي : (*)

$$\bar{\psi} : A_0 \longrightarrow A_1$$

$$a \longmapsto \bar{\psi}(a) = \begin{cases} a & ; \ a \in S \\ \psi(a) & ; \ a \notin S \end{cases}$$

(S مشتركة بين A_0 و A_1 لذلك $\bar{\psi}$ يحول عناصر S بأنفسهم

أما عندما $a \notin S$ وحيث $a \in A_0 = A$ فإن لـ a صورة وفق $\psi = \underset{B_1}{\theta_1} \circ f$

حيث $\psi : A \rightarrow A_2$ الذي هو تقابل، إذاً a لها صورة $\psi(a)$ موجودة في $(A_1 \supseteq A_2)$

(*) من جهة أخرى: إن A تقابل، إذاً يوجد التقابل $\varphi : B \longrightarrow A_1$ ، $\varphi^{-1} : A_1 \longrightarrow B$

إذاً من (*) و(*) نجد التقابل:

$$\varphi^{-1} \circ \overline{\varphi} : A = A_0 \longrightarrow B$$ (تركيب تقابلين هو تقابل)

وهذا يعني أن:

$$Card(A) = Card(B) \quad \#$$

تعريف

أ- $A \sim B$ (A تكافئ B) $\Leftrightarrow$ يوجد تقابل بين A و B $\Leftrightarrow$ $Card(A) = Card(B)$

ب- A مجموعة منتهية $\Leftarrow$ عدد عناصر A $= Card(A)$

ج- A مجموعة غير منتهية $\leftarrow$ $A \sim \mathbb{N} \Leftrightarrow$ A قابلة للعد $\Leftrightarrow$ $Card(A) = \aleph_0$

$\swarrow$ $A \not\sim \mathbb{N}$ أي لا يمكن إنشاء أي تقابل بين A و $\mathbb{N}$

$\Leftrightarrow$ A غير قابلة للعد.

تعريف المجموعة غير القابلة للعد:

هي مجموعة غير منتهية ولا تكافئ $\mathbb{N}$، أي: هي مجموعة غير منتهية وقدرتها لا تساوي $\aleph_0$

حيث: المجموعة غير المنتهية:

هي المجموعة التي كلما أخذنا منها عنصراً أو أكثر يبقى منها عناصر بعد كل عملية أخذ.

المجموعة المنتهية هي التي لا تحقق التعريف الأخير.

(المجموعة، هي ليست عناصر لها صفة معينة بل هي: مجموعة عناصر لها صفة معينة)

ملاحظة:

* مجموعة القدرات مجموعة مرتبة كلياً.

* العنصر الأصغر في مجموعة القدرات للمجموعات غير المنتهية هو $\aleph_0$

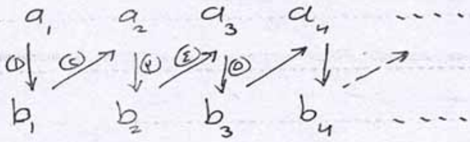
* في كل مجموعة غير منتهية يمكن إيجاد مجموعة جزئية قابلة للعد.

د- A غير منتهية $\Leftarrow$ توجد في A مجموعة جزئية قابلة للعد واحدة على الأقل.

(نأخذ العنصر a من A غير المنتهية فيبقى منها عناصر، نكرر عملية الأخذ فتشكل مجموعة عدود

كيفية فصل المجموعات المتقاطعة :

سابقاً عندما قلنا أن اجتماع مجموعتين قابلتين للعد يكون قابلاً للعد ، أثبتنا ذلك عن طريق الترقيم بالأسهم كما يلي :



- هذا في حال كانت المجموعتين :

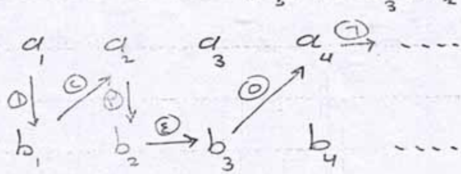
$\{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$ و $\{b_1, b_2, b_3, b_4, \dots\}$

منفصلتين (تقاطعهما ϕ ، لا تشتركان بأي عنصر)

- أما لو كانتا غير منفصلتين :

يبقى اجتماعهما هو مجموعة قابلة للعد ، ولكن عندما نثبت ذلك عن طريق الترقيم فإننا نتجاوز العناصر المكررة ، كل عنصر نقوم بترقيمه نقارنه بالعناصر التي تسبقه والتي حتماً عددها منتهي ، فإن كان يطابق أياً منها فإننا نتجاوزه ولا نرقمه مع عناصر الاجتماع. (ولذلك فإن عملية المقارنة ممكنة)

مثلاً لو كان $b_4 = a_1$ و $a_3 = b_2$ عندئذٍ :



(تجاوزنا a_3 و b_4 في الترقيم)

- بفرض لدينا المجموعتين A و B المتقاطعتين ، ونريد أن نفصلهما بحيث نحصل على مجموعتين منفصلتين (غير متقاطعتين)

فإننا نتبع ما يلي :

• نأخذ $B_1 = B - A$ فنحصل على المجموعتين المنفصلتين A و B_1 $(A \cap B_1 = \phi)$

لكن في هذه الحالة عملية الفصل أثرت على قدرتي المجموعتين الأصليتين

حيث أصبحت $card\, B_1 \leq card\, B$ (إذاً قدرة B تأثرت بالفصل)

• طريقة ثانية للحصول على مجموعتين منفصلتين بحيث لا تتأثر قدرة أي من المجموعتين :

لدينا المجموعتين A و B ، نأخذ الجداء الديكارتي :

$$A \times \{1\} = \{(a,1) \; ; \; a \in A\}$$

$$B \times \{2\} = \{(b,2) \; ; \; b \in B\}$$

فتكون المجموعتان $A \times \{1\}$ و $B \times \{2\}$ منفصلتين

(بسبب اختلاف المسقط الثاني بين عناصرهما $(a,1) \neq (b,2)$: $\forall a,b$)

وبحيث أننا حافظنا على القدرات ، حيث أن

$$card(A \times \{1\}) = card(A) : \quad A \sim A \times \{1\}$$

$$card(B \times \{2\}) = card(B) : \quad B \sim B \times \{2\}$$

ملاحظة :

يمكن أخذ أي مجموعتين غير $\{1\}$ و $\{2\}$ مثل $\{x\}$ و $\{y\}$ بشرط $x \neq y$

فتكون $(A \times \{x\}) \cap (B \times \{y\}) = \phi$

إذاً $B \times \{y\}$ ، $A \times \{x\}$ مجموعتان منفصلتان

* قدرة اجتماع مجموعات منفصلة تساوي مجموع القدرات لهذه المجموعات.

أما لو كانت المجموعات غير منفصلة فقبل حساب قدرة الاجتماع يجب فصل المجموعات.

مثلاً: $A, B, C \longrightarrow \underbrace{A, B - A, C - (A \cap B)}_{\text{٣ مجموعات منفصلة}}$

* عندما نقول عن مجموعة أنها "قابلة للعد على الأكثر"

فهنا يعني أنها إما منتهية أو غير منتهية وقابلة للعد.

ملاحظة :

قدرات المجموعات غير المنتهية

سلسلة لقدرات مرتبة كلياً : $\underbrace{0<1<2<\dots<n<\dots}_{\text{قدرات المجموعات المنتهية}}<\aleph_0<\aleph_1<\dots\dots$

قدرات المجموعات المنتهية

لا يوجد بين $\aleph_0$ و $\aleph_1$ أي قدرة

قدرة المجموعات غير المنتهية

والتي هي قابلة للعد

- إن $\aleph_0$ أصغر أو تساوي قدرة أي مجموعة غير منتهية ؛ ولذلك فهي أصغر عنصر في مجموعة قدرات المجموعات غير المنتهية

وإثبات ذلك أنه : بما أن كل مجموعة غير منتهية تحوي مجموعة قابلة للعد ، فإنه نفرض B مجموعة غير منتهية فهي تحوي المجموعة A القابلة للعد (أي التي قدرتها $\aleph_0$)

ومنه فإن : $A \subseteq B$ إذاً $\aleph_0 = card(A) \leq card(B)$

- كما أن $\aleph_0$ أكبر من قدرة أي مجموعة منتهية.

- وأيضاً لا يمكن القول أن هناك قدرة تتبع $\aleph_0$ مباشرة" أو تسبق $\aleph_0$ مباشرة"

* جميع المجموعات القابلة للعد متكافئة (حيث جميعها لها نفس القدرة $\aleph_0$)

* أي مجموعتين متكافئتين إحداهما غير قابلة للعد فالأخرى حتماً غير قابلة للعد

قابلة للعد فالأخرى حتماً قابلة للعد

* المجموعات غير القابلة للعد ليس ضروري أن تكون متكافئة

والمثال على ذلك : مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ليست قابلة للعد

ومجموعة أجزاء $\mathbb{R}$ أيضاً غير قابلة للعد

لكن لا يوجد أي تقابل بين $\mathbb{R}$ ومجموعة أجزائه إذاً هما غير متكافئتان

(قدراتهما مختلفتان حيث دائماً إذا كانت لدينا المجموعة A قدرتها $card(A)=n$

فإن قدرة مجموعة أجزائها تساوي 2^n إذاً A لا تكافئ مجموعة أجزائها)

* إن $\mathbb{N}^* \sim \mathbb{N}$ ويحملتاهما لها القدرة نفسها والإثبات على ذلك وجود التقابل الآتي:

$$\Phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$$

$$n \longmapsto n+1$$

$$m \longmapsto m+1$$

Φ هو تطبيق متباين لأن: $\Phi(n)=\Phi(m) \Leftrightarrow n+1=m+1 \Leftrightarrow n=m$

وغامر: $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$ فإنه يوجد $\ell-1 \in \mathbb{N}$ بحيث $\underline{\Phi(\ell-1)}=(\ell-1)+1=\underline{\ell}$

- إذاً $card(\mathbb{N}) = card(\mathbb{N}^*)$

* اجتماع المجموعات القابلة للعد هو مجموعة قابلة للعد

* المجموعة $\mathbb{Z}$ قابلة للعد لأن:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$$

$\mathbb{Z}^+$ تكافئ $\mathbb{N}^*$ هي نفس — منتهية إذاً قابلة للعد — حيث نفس $\mathbb{Z}^+$ لكن مع إشارة سالبة فهي إذاً قابلة للعد

إذاً $\mathbb{Z}^-$ قابلة للعد

- ومنه فإن $\mathbb{Z}$ هي اجتماع مجموعات قابلة للعد وبالتالي فهي قابلة للعد.

- $\mathbb{Q}$ قابلة للعد (وسنثبت ذلك تباعاً)

$\mathbb{R}$ غير قابلة للعد

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ غير قابلة للعد:

نفرض $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ قابلة للعد وحيث $\mathbb{Q}$ قابلة للعد إذاً $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

$\mathbb{R}$ أصبحت اجتماع مجموعتين قابلتين للعد فهي إذاً قابلة للعد، وهذا غير ممكن

إذاً الفرض الجدلي خاطئ ومنه فإن $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ غير قابلة للعد.

- إن $\mathbb{Q}$ قابلة للعد لأن: $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$

تكافئ $\mathbb{Q}^+$ أي لها القدرة ذاتها

• Q^+ قابلة للعد حيث :

سنكتب كل كسر $\frac{a}{b}$ بشكل ثنائية (a,b) فتكون Q^+ مجموعة جميع الكسور $\frac{a}{b}$ قابلة للعد كما يلي : حيث $(a,b \in \mathbb{Z}^+)$

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & \xrightarrow{1} & (1,2) & (1,3) & \xrightarrow{5} & (1,4) \quad \cdots \\
(2,1) & & (2,2) & (2,3) & & (2,4) \\
(3,1) & & (3,2) & (3,3) & & (3,4) \\
(4,1) & & (4,2) & (4,3) & & (4,4) \\
\vdots & & & & & \cdots
\end{array}$$

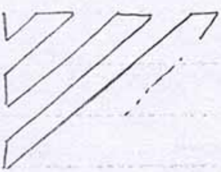
تجاوزنا $(2,2)$ لأنه مكرر $\frac{2}{2}=\frac{1}{1}$

إذاً عملية الترقيم ممكنة ومنه فإن Q^+ قابلة للعد

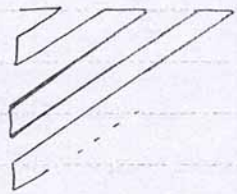
وحيث Q اجتماع قابلات للعد إذاً فهي قابلة للعد.

طريقتي الترقيم :

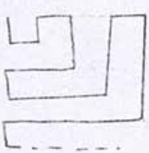
أ -



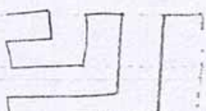
أو نفسها



ب - طريقة المربعات (مربعات متداخلة)



أو نفسها



انتهت