المحاضرة الرابعة

30/3/2014

مبرهنة1 لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $X \in ob(\mathcal{L})$ عندئذ

1 - يوجد دالي مباشر $h_X : \mathcal{L} \longrightarrow Sets$

2 - يوجد دالي غير مباشر $\hat{h}_X : \mathcal{L} \longrightarrow Sets$

الإثبات:

① لندرس وجود الدالي $h_X : \mathcal{L} \longrightarrow Sets$

1 - إيجاد تطبيق الأشياء:

لنعرف علاقة: $h_X : ob(\mathcal{L}) \longrightarrow ob(Sets)$

بالشكل: $\forall A \in ob(\mathcal{L}) \;,\; \boxed{h_X(A) = \mathcal{L}(X, A)} \in ob(Sets)$

ليكن: $A, B \in ob(\mathcal{L}) \;:\; A = B$

$$h_X(A) = \mathcal{L}(X, A) = \mathcal{L}(X, B) = h_X(B)$$

وبالتالي العلاقة h_X تطبيق

هذه المساواة قاعدة: ليتساوى مورفيزمين يجب أن يكون لهما نفس المنطلق ونفس المستقر..

2 - إيجاد تطبيق المورفيزمات:

لنعرف علاقة: $h_X : Mor(\mathcal{L}) \longrightarrow Mor(Sets)$

ليكن $A, B \in ob(\mathcal{L})$ ، $u : A \longrightarrow B$

لنضع $h_X(u) : h_X(A) \longrightarrow h_X(B)$

حسب التطبيق الأول: $\mathcal{L}(X, A) \longrightarrow \mathcal{L}(X, B)$

ولنبرهن على أن $h_X(u)$ تطبيق..

لنعرف $h_X(u)$ بالشكل:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "u.v"'] & A \arrow[d, "u"] \\ & B \end{tikzcd}$$

$\forall v \in \mathcal{L}(X, A)$

$$h_X(u)(v) = u.v \in \mathcal{L}(X, B)$$

لإثبات أن $h_X(u)$ تطبيق:

ليكن $u_1, u_2 \in \mathcal{L}(A, B) \;:\; \boxed{u_1 = u_2}$

$$\forall v \in \mathcal{L}(X, A) \;:\; u_1.v = u_2.v$$

وبالتالي $h_X(u_1)(v) = h_X(u_2)(v)$

وبالتالي العلاقة h_X تطبيق.. $h_X(u_1) = h_X(u_2)$

• ومثال التطبيقين في إثبات الشرطين (العام، الأول)..

ليكن $A \in ob(\mathcal{C})$ عندئذ $h_X(I_A) : h_X(A) \longrightarrow h_X(A)$

$: \mathcal{C}(X,A) \longrightarrow \mathcal{C}(X,A)$

$\forall v \in \mathcal{C}(X,A) \; ; \; h_X(I_A)(v) = I_A . v = v$

$h_X(I_A) = I_{\mathcal{C}(X,A)} = I_{h_X(A)}$

لتكن $u : A \longrightarrow B \; , \; v : B \longrightarrow D$

حيث $A, B, D \in ob(\mathcal{C})$

فيكون $v.u : A \longrightarrow D$

$h_X(v.u) : h_X(A) \longrightarrow h_X(D)$

$: \mathcal{C}(X,A) \longrightarrow \mathcal{C}(X,D)$

$\forall \mu \in \mathcal{C}(X,A) \; ; \; h_X(v.u)(\mu) = (v.u).\mu$

$= v.(u.\mu)$ توضيح ①

$= h_X(v)(u.\mu)$

$= h_X(v)(h_X(u)(\mu))$ توضيح ②

$= (h_X(v).h_X(u))(\mu)$ توضيح ③

① $u.\mu : X \to B$, $h_X(v) : \mathcal{C}(X,B) \to \mathcal{C}(X,D)$, $h_X(v)(u.\mu) = v.(u.\mu)$

② $h_X(u) : \mathcal{C}(X,A) \to \mathcal{C}(X,B)$, $h_X(u)(\mu) = u.\mu$

③ $f(g(x)) = (f \circ g)(x)$

ومنه $h_X(v.u) = h_X(v)\, h_X(u)$

ومنه نجد أن h_X دالي مباشر .. (موجود في أي فئة ولأي X)

$$\hat{h}_X : \mathcal{L} \longrightarrow Sets$$

1- إيجاد تطبيق الأشياء

لنعرف العلاقة:

$$\hat{h}_X : ob(\mathcal{L}) \longrightarrow ob(Sets)$$
$$\forall A \in ob(\mathcal{L}) \; ; \; \hat{h}_X(A) = \mathcal{L}(A, X)$$

وإذا كان $A, B \in ob(\mathcal{L}) \; ; \boxed{A = B}$

فإن: $\mathcal{L}(A, X) = \mathcal{L}(B, X)$

$$\hat{h}_X(A) = \hat{h}_X(B)$$

2- تطبيق المورفيزمات

ليكن $u : A \longrightarrow B$ حيث $A, B \in ob(\mathcal{L})$

مورفيزم للفئة $\mathcal{L}$

نضع

إثبات العلاقة تطبيق

$$\hat{h}_X(u) : \hat{h}_X(B) \longrightarrow \hat{h}_X(A)$$
$$: \mathcal{L}(B, X) \longrightarrow \mathcal{L}(A, X)$$
$$\forall v \in \mathcal{L}(B, X) \; ; \; \hat{h}_X(u)(v) = v.u$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "v.u"'] & B \arrow[d, "v"] \\ & X \end{tikzcd}$$

ليكن $v_1, v_2 : B \longrightarrow X \in \mathcal{L}(B, X) : \boxed{v_1 = v_2}$

فيكون $v_1.u = v_2.u$

$$\hat{h}_X(u)(v_1) = \hat{h}_X(u)(v_2)$$

إذن العلاقة تطبيق

التطابق

شرط التطابق $\forall A \in ob(\mathcal{L}) : I_A : A \longrightarrow A$

$$\hat{h}_X(I_A) : \hat{h}_X(A) \longrightarrow \hat{h}_X(A)$$
$$: \mathcal{L}(A, X) \longrightarrow \mathcal{L}(A, X)$$
$$\forall \theta \in \mathcal{L}(A, X) \; ; \; \hat{h}_X(I_A)(\theta) = \theta . I_A = \theta$$
$$\Rightarrow \hat{h}_X(I_A) = I_{\hat{h}_X(A)}$$

الحل: شرط التركيب: ليكن $u : A \to B$ ، $v : B \to D$

مورفيزمات الفئة $\mathcal{L}$ .. حيث $A, B, D \in ob(\mathcal{L})$

$v \cdot u : A \to D$

$$\hat{h}_x(v \cdot u) : \hat{h}_x(D) \to \hat{h}_x(A)$$
$$: \mathcal{L}(D, X) \to \mathcal{L}(A, X)$$

$$\forall \alpha \in \mathcal{L}(D, X) : \hat{h}_x(v \cdot u)(\alpha) = \alpha \cdot (v \cdot u)$$
$$= (\alpha \cdot v) \cdot u$$
$$= \hat{h}_x(u)(\alpha \cdot v)$$
$$= \left(\hat{h}_x(u) \cdot \hat{h}_x(v)\right)(\alpha)$$

$\hat{h}_x(v) : \hat{h}_x(D) \to \hat{h}_x(B)$
$\mathcal{L}(D, X) \to \mathcal{L}(B, X)$
$\hat{h}_x(v)(\alpha) = \alpha \cdot v$

ومنه نجد أن: $\hat{h}_x(v \cdot u) = \hat{h}_x(u) \cdot \hat{h}_x(v)$

وبالتالي: $\hat{h}_x$ دالي غير مباشر..

مبرهنة: ليكن $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ فئتين و $F : \mathcal{L} \to \mathcal{R}$ دالي مباشر

عندئذ: 1- يوجد دالي غير مباشر $G : \mathcal{L}^{\circ} \to \mathcal{R}$

2- يوجد دالي غير مباشر $H : \mathcal{L} \to \mathcal{R}^{\circ}$

حيث $\mathcal{L}^{\circ}$ ، $\mathcal{R}^{\circ}$ هي الفئات الثنوية للفئات $\mathcal{L}$ ، $\mathcal{R}$

الإثبات:

تطبيق الأشياء

1 بما أن $F : \mathcal{L} \to \mathcal{R}$ دالي مباشر عندئذ

$$F : ob(\mathcal{L}) \to ob(\mathcal{R})$$

تطبيق $F : ob(\mathcal{L}^{\circ}) \to ob(\mathcal{R}) \Leftarrow ob(\mathcal{L}) = ob(\mathcal{L}^{\circ})$

سنرمزله G : $G : ob(\mathcal{L}^{\circ}) \to ob(\mathcal{R})$

هكذا نكون قد أوجدنا تطبيق الأشياء

بما أن $F : \mathcal{L} \to \mathcal{R}$ دالي مباشر عندئذ:

$$\forall u : A \to B \; ; \; A, B \in ob(\mathcal{L})$$

$F(u) : F(A) \to F(B) \in \mathcal{R}(F(A), F(B))$ ← مورفيزم موجود في $\mathcal{R}$ منطلقه $F(A)$ ومستقره $F(B)$

مثال

ليكن $v \in \mathcal{L}^{\circ}(A,B) : v : A \to B$

$v \in \mathcal{L}^{\circ}(A,B) = \mathcal{L}(B,A)$

ومنه فإن: $F(v) : F(B) \to F(A)$

بحسب التعريف الأول

ومن أجل هذا التطبيق: $G(v) : G(B) \to G(A)$

① شرط المطابقة: $\forall A \in ob(\mathcal{L}) \; ; \; G(I_A) = F(I_A) = I_{F(A)}$

$= I_{G(A)}$

② شرط الجداء: $u : A \to B \; , \; v : B \to D \in Mor(\mathcal{L}^{\circ})$

مورفيزمات من الفئة $\mathcal{L}^{\circ}$

$v.u : A \to D$

$v.u \in \mathcal{L}^{\circ}(A,D) = \mathcal{L}(D,A)$

$u.v$

نفس العنصر ولكن ظهر بشكل معاكس بالفئة المعاكسة

$G(v.u) = F(u.v) = F(u).F(v) = G(u).G(v)$

وهنا يبين أن الدالة G عكس متغيرة ..

$\boxed{2}$ وظيفة

انتهت المحاضرة