برهان متراجحة كوشي شفارتز من المبرهنة الأخيرة في المحاضرة السابقة:

$$|<x, y>| \leq \|x\| . \|y\|$$

نميز حالتين:

١- $X = O_X$

$$L_1 = <x, y> = <O_X, y>$$

ولكن $O_X = O_{IR} . O_X$ ومنه:

$$L_1 = <O_{IR} . O_X , y> = O_{IR} . <O_X , y> = O_{IR}$$

$$L_2 = \|x\| . \|y\| = \|O_X\| . \|y\| = O_{IR} . \|y\| = O_{IR}$$

$$\Leftarrow \quad L_1 = L_2$$

٢- في حالة $X \neq O_X$ نفرض أن $y = \alpha x$

$$0 \leq \|y - \alpha x\| \Rightarrow \|y - \alpha x\|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \|y - \alpha x\| = <y - \alpha x , y - \alpha x>$$

$$= <y, y> + <y, -\alpha x> + <-\alpha x, y> + <-\alpha x, -\alpha x>$$

$$= \|y\|^2 - \alpha <y, x> - \alpha <x, y> + \alpha^2 <x, x>$$

$$= \|y\|^2 - 2\alpha <x, y> + \alpha^2 \|x\|^2$$

α اختياري ومنه نختار:

$$\alpha = \frac{<x, y>}{<x, x>}$$ ونعوضها:

$$0 \leq \|y - \alpha x\|^2 = \|y\|^2 - 2 \frac{(<x, y>)^2}{<x, x>} + \frac{(<x, y>)^2}{(<x, x>)^2} \|x\|^2$$

$$= \|y\|^2 - 2 \frac{(<x, y>)^2}{\|x\|^2} + \frac{(<x, y>)^2}{\|x\|^2}$$

حيث: $\langle x, x\rangle = \|x\|^4$

$$= \|y\|^2 - \frac{(\langle x, y\rangle)}{\|x\|^2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \|y - \alpha x\|^2 = \frac{\|y\|^2\|x\|^2 - (\langle x, y\rangle)^2}{\|x\|^2}$$

$$0 \leq \|y\|^2 . \|x\|^2 - \langle x, y\rangle^2$$

$$\Rightarrow \langle x, y\rangle^2 \leq \|x\|^2 . \|y\|^2$$

$$\Rightarrow |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| . \|y\|$$

نتيجة: إن الشرط اللازم والكافي كي تنقلب المتراجحة إلى مساواة هو أن يكون y ، x مرتبطان خطياً أو أن يكون x أو y مساوياً إلى صفر الفضاء.

تمرين:

أثبت أن كل نظيم مولد من جداء داخلي يحقق المساواة التالية:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

وتدعى مساواة متوازي الأضلاع.

الحل:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$$
$$= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$$
$$= \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

$$\Rightarrow \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

نتيجة:

1) كل فضاء جداء داخلي هو فضاء منظم.

٢) كل نظيم مشتق من جداء داخلي تحقق مساواة متوازي الأضلاع وبالتالي النظيم الذي لا يحقق تلك المساواة لا يمكن أن يشتق من جداء داخلي

وبالتالي ليس بالضرورة أن يكون كل فضاء منظم هو فضاء جداء داخلي ولاثبات ذلك يكفي اعطاء مثال:

مثال: لتكن $X = \mathbb{R}^2$ ولنعرف الدالة:

$$\|x\| = |x_1| + |x_2| \quad ; \quad X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

نأخذ العنصرين:

$$x = (1,1) \quad , \quad y = (1,-1)$$

نطبق خاصة متوازي الأضلاع:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

$$\|x\| = \|(1,1)\| = |1| + |1| = 2 \Rightarrow \|x\|^2 = 4$$

$$\|y\| = \|(1,-1)\| = |1| + |-1| = 2 \Rightarrow \|y\|^2 = 4$$

$$x + y = (2,0) \Rightarrow \|x+y\| = \|(2,0)\| = 2$$

$$x - y = (0,2) \Rightarrow \|x-y\| = \|(0,2)\| = 2$$

$$\Rightarrow l_1 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 8$$

$$l_2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = 2(8) = 16$$

$$\Rightarrow L_1 \neq L_2$$

أي أن النظيم غير مشتق من جداء داخلي.

الفضاء المتري:

هو عبارة عن مجموعة X غير خالية معرف عليها دالة مسافة نرمز لها d حيث:

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto d(x,y)$$

ندعو d مسافة أو متريك على X.

وندعو المجموعة (X, d) بفضاء متري إذا حقق الشروط التالية:

1) $\forall\ x, y \in X\ :\ d(x,y) \geqslant 0$

2) $\forall\ x, y \in X\ :\ d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

3) $\forall\ x, y \in X\ :\ d(x,y) = d(y,x)$

4) $\forall\ x, y, z \in X\ :\ d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ (*)

وتسمى (*) متراجحة المثلث.

مثال: لتكن الدالة:

$$d : R \times R \longrightarrow R$$
$$(x,y) \longmapsto d(x,y) = |x-y|$$

اثبت أن $d(x,y)$ فضاء متري.

الحل:

1) $\forall\ x, y \in R\ :\ d(x,y) = |x-y| \geqslant 0$

2) $\forall\ x, y \in R\ :\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0$

$\Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$

3) $\forall\ x, y \in \mathbb{R}\ :\ d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$

4) $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}\ :\ d(x,z) = |x-z| = |x-y+y-z|$

$\leqslant |x-y| + |y-z|$

$\Rightarrow d(x,z) \leqslant |x-y| + |y-z|$

$\leqslant d(x,y) + d(y,z)$

ملاحظات:

1) من الممكن أن ندخل دالة مسافة على فضاء متجهي ويصبح اسمه فضاء متري

2) كل نظيم على فضاء متجهي X تحدد متريًا d على X معرفًا بالمساواة:

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

ويسمى d مترياً مولداً من نظيم (كل فضاء منظم هو فضاء متري).

مبرهنة: إذا كان d مترياً مولداً من نظيم على فضاء متجهي X فإن:

1) $d(x+z, y+z) = d(x,y)$

2) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$

الإثبات:

1) $d(x+z, y+z) = \|x+z-(y+z)\|$
$= \|x+z-y-z\| = \|x-y\| = d(x,y)$

2) $d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = \|\alpha(x-y)\|$
$= |\alpha| \|x-y\| = |\alpha| d(x,y)$

نتيجة: ليس بالضرورة أن يكون كل فضاء متري هو فضاء منظم.

مثال على فضاء متري لا يشتق من نظيم:

ليكن d فضاء متري مولد من نظيم ولنعرف الدالة:

$$\tilde{d}(x,y) = \begin{cases} 1 + d(x,y) & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

اثبت أن $\tilde{d}$ غير مشتق من نظيم

- الحل:

1) $d(x,y) \geq 0 \Rightarrow 1 + d(x,y) > 0 \Rightarrow \tilde{d}(x,y) \geq 0$

2) $\tilde{d}(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

3) $\tilde{d}(x,y) = 1 + d(x,y) = 1 + d(y,x) = \tilde{d}(y,x)$

حيث $x \neq y$

4) $\tilde{d}(x,z) = 1 + d(x,z) \quad ; x \neq z$

$$\leq 1 + d(x,y) + d(y,z)$$

$$\leq 1 + d(x,y) + 1 + d(y,z)$$

$$\leq \tilde{d}(x,y) + \tilde{d}(y,z)$$

ومنه $\tilde{d}(x,y)$ فضاء متري.

$$\tilde{d}(\alpha x, \alpha y) \stackrel{?}{=} |\alpha|\, \tilde{d}(x,y) \quad ; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$L_1 = \tilde{d}(\alpha x, \alpha y) = 1 + d(\alpha x + \alpha y)$$

$$= 1 + |\alpha|\, d(x,y)$$

$$L_2 = |\alpha|\, \tilde{d}(x,y) = |\alpha|\, [1 + d(x,y)]$$

$$= |\alpha| + |\alpha|\, d(x,y)$$

ومن أجل $\alpha \neq 1$ فإن:

$$L_1 \neq L_2$$

ومنه الدالة فضاء متري غير مشتق من نظيم.

مثال: لتكن S مجموعة كل المتتاليات الحقيقية المحدودة وغير المحدودة:

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{(x_i - y_i)}{1 + (x_i - y_i)}$$

حيث:

$$y = \{y_i\}$$
$$x = \{x_i\}$$

اثبت أن d تعرف دالة مسافة ولكنه غير مولدة من نظيم

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - z_i|}$$

$$|x_i - z_i| = |x_i - y_i + y_i - z_i|$$

$$\leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i| \quad \text{--- (1)}$$

لكن $0 < \alpha < \beta$

$$\alpha+\alpha\beta < \beta+\alpha\beta \Rightarrow \alpha(1+\beta) < \beta(1+\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{1+\alpha} < \frac{\beta}{1+\beta} \quad --- \circledast$$

بالاستفادة من $\circledast$ يكون :

$$\frac{|x_i - z_i|}{1+|x_i - z_i|} \leq \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|} + \frac{|y_i - z_i|}{1+|y_i - z_i|}$$

نضرب بـ $\frac{1}{2^i}$ مع اضافة Σ :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - z_i|}{1+|x_i - z_i|} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|}$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|y_i - z_i|}{1+|y_i - z_i|}$$

$$\Rightarrow d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

- انتهت المحاضرة -