/ /

المحاضرة العاشرة -

مثال: حل مسألة الشروط التالية بطريقة تحويلات لابلاس.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{C^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - K\cdot\sin\pi x \quad ; C>0, t>0$$

$$z(x,0) = z'(x,0) = 0$$

$$z(0,t) = z'(1,t) = 0$$

الحل:

نأخذ تحويل لابلاس للطرفين:

$$L\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right] = \frac{1}{C^2}\cdot L\left[\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right] - K\cdot\sin\pi x\cdot L[1].$$

$$Z''(x,S) = \frac{1}{C^2}\cdot\left[S^2\cdot Z(x,S) - S\cdot\overbrace{z(x,0)}^{0} - \overbrace{\frac{\partial z(x,0)}{\partial t}}^{z'(x,0)=0}\right] - K\cdot\sin\pi x\cdot\left[\frac{1}{S}\right]$$

$$\Rightarrow Z''(x,S) = \frac{S^2}{C^2}\cdot Z(x,S) - \frac{K}{S}\cdot\sin\pi x$$

$$\Rightarrow Z''(x,S) - \frac{S^2}{C^2}\cdot Z(x,S) = -\frac{K}{S}\cdot\sin\pi x \quad \ldots\ldots (1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية بأمثال ثابتة لحلها نأخذ أولاً المعادلة التفاضلية بدون طرف ثانٍ

$$Z'' - \frac{S^2}{C^2}\cdot Z = 0$$

نوجد المعادلة المميزة لها وهي:

$$\lambda^2 - \frac{S^2}{C^2} = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \frac{S}{C} \quad , \lambda_2 = \frac{-S}{C}$$

فيكون الحل العام للمعادلة المتجانسة بدون طرف ثانٍ هو:

$$Z(x,S) = C_1\cdot e^{\lambda_1 x} + C_2\cdot e^{\lambda_2 x} = C_1\cdot e^{\frac{S}{C}x} + C_2\cdot e^{-\frac{S}{C}\cdot x}$$

/ /

- نوجد الحل الخاص لغير المتجانسة فليكن من الشكل:

$$Z_2 = A.\sin\pi x \Rightarrow Z_2' = A.\pi.\cos\pi x$$

$$Z_2'' = -A\pi^2.\sin\pi x$$

- نعوض المشتقات في المعادلة (1):

$$-A.\pi^2.\sin\pi x - \frac{S^2}{C^2}.A.\sin\pi x = -\frac{K}{S}.\sin\pi x$$

$$-A\left(\pi^2+\frac{S^2}{C^2}\right).\sin\pi K = -\frac{K}{S}.\sin\pi x$$

$$\Rightarrow A = \frac{K}{S}\left(\frac{C^2}{C^2\pi^2+S^2}\right) = \frac{K.C^2}{S(S^2+C^2.\pi^2)}$$

- فيكون الحل العام للمعادلة:

$$(2)\ldots\ldots Z(x,S) = Z_1 + Z_2 = C_1.e^{S/c.x} + C_2.e^{-S/c.x} + A.\sin\pi x$$

حيث:

$$A = \frac{K.C^2}{S(S^2+C^2.\pi^2)}$$

- لنحسب C_2, C_1:

$$z(0,t)=0 \Rightarrow Z(0,S) = \int_0^\infty z(0,t).e^{-St}.dt = 0$$

. نعوض في (2) $x=0$ فنجد:

$$0 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = -C_2$$

$$z(1,t)=0 \Rightarrow Z(1,S) = \int_0^\infty e^{-St}.z(1,t).dt = 0$$

. نعوض في (2) $x=1$ فنجد:

$$0 = C_1.e^{S/c} + C_2.e^{-S/c} + 0$$

$$0 = C_1 e^{S/c} - C_1.e^{-S/c} = C_1.(e^{S/c} - e^{-S/c})$$

$$\Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow Z(x,S) = \frac{K.C^2}{S(S^2+C^2\pi^2)}.\sin\pi x$$

موزاييك

/ /

$$Z(x,S) = K.c^2.\sin\pi x.\left(\frac{1}{S(S^2+\pi^2c^2)}\right)$$

$$\frac{1}{S(S^2+\pi^2.c^2)} = \frac{A}{S} + \frac{BS+D}{S^2+\pi^2.c^2}$$

$$(S^2+\pi^2C^2) \qquad (S)$$

$$1 = S^2A + \pi^2.c^2.A + BS^2 + D.S$$

$$\Rightarrow (A+B)S^2 + D.S + \pi^2.S^2.A = 1$$

$$A = -B \;,\; D = 0 \;,\; A = \frac{1}{\pi^2.c^2}$$

$$Z(x,S) = K.c^2.\sin\pi x.\left[\frac{A}{S} + \frac{BS}{S^2+\pi^2.c^2} + \frac{\cancel{D}}{\cancel{S^2}+\pi^2.c^2}\right]$$

$$L^{-1}[Z(x,S)] = K.c^2.\sin\pi x\left[L^{-1}\left[\frac{A}{S}\right] + L^{-1}\left[\frac{B.S}{S^2+\pi^2c^2}\right]\right]$$

$$z(x,t) = K.c^2.\sin\pi x.\left[A + B\cos(\pi.c.t)\right]$$

$$= Kc^2.\sin\pi.x\left[\frac{1}{\pi^2c^2} - \frac{1}{\pi^2.c^2}\cos(\pi c t)\right]$$

$$z(x,t) = \frac{K}{\pi^2}.\sin\pi x\left[1 - \cos(\pi.c\,t)\right]$$

تمرين وظيفة:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 4.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad ; t > 0$$

$$z(0,t) = z(3,t) = 0$$

$$z(x,0) = 10.\sin 2\pi x - 6\sin 4\pi x$$

- انتهت المحاضرة العاشرة -

موزاييك