م5

- تعريف النقطة الداخلية: نقول عن $x_0 \in \mathbb{R}^n$ أنها نقطة داخلية في المجموعة $M \subseteq \mathbb{R}^n$
حيث $x_0 \in M$ ، إذا كانت x_0 مركزاً لكرة مفتوحة محتواة في M أي محتواه.

إذا كانت النقطة على المحيط مثل ليست داخلية

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ ، $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$x_0 \in M$ داخلية $\Longleftrightarrow$ $N(x_0, \varepsilon) \subseteq M$

إذاً M هو جوار للنقطة x_0.

هذه النقطة ليست داخلية لأنها ليست ضمن الجوار M.

غير داخلية

* ملاحظة عن النقطة الداخلية:
- إن النقطة الداخلية محصورة تماماً بين الطرفين.
- إن داخل أي مجال هو المجال المفتوح حصراً. مثال $[0,2]^\circ =]0,2[$

ونطلق على مجموعة النقاط الداخلية بداخل M ونرمز لها بالرمز M°. $[0,2[^\circ =]0,2[$

تعريف المجموعة المفتوحة: * المجموعة $\boxed{M \text{ مفتوحة}}$ $\Longleftrightarrow$ $M = M^\circ$. $]0,2[^\circ =]0,2[$

- تعريف النقطة الحدية "نقطة تجمع أو تراكم"
" لتكن $\phi \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ ولتكن $x_0 \in M$.
نقول عن x_0 إنها نقطة حدية أو نقطة تجمع أو تراكم إذا وفقط إذا كانت
$\forall\ N(x_0, \varepsilon)\ ;\ N(x_0, \varepsilon) \cap (M - \{x_0\}) \neq \phi$
أي جوار محذوف (غير النقطة x_0)

أي: إذا كان تقاطع أي جوار محذوف (بدون المركز) مع المجموعة غير خالية.
ونطلق على مجموعة كل النقاط الحدية لـ M باسم المجموعة المشتقة ونرمز لها بالرمز
M' أو $D(M)$ "

تعريف النقطة المحيطية:
لتكن $\phi \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ ولتكن $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ، نقول عن x_0 إنها
محيطية لـ M إذا تقاطع كل جوار لـ x_0 مع M ومع متممة M.
$\forall\ U = U(x_0)\ ,\quad U \cap M \neq \phi$
$U \cap (\mathbb{R}^n - M) \neq \phi$

لا جوار لـ x_0

الفرق بين النقطة المحيطية والحدية؟
لا تلزم تقع

حفظ التعاريف بدون أمثلة

مثل $V =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ لا يوجد جوار يأخذ النقطة صفر. $U \cap M \neq]0, \frac{1}{2}[\neq \emptyset$

$U \cap M^c =]-\frac{1}{2}, 0[\neq \emptyset$

مثلاً لنأخذ الجوار $M = [0, 1[$

نعرف أن النقطتان 0 ، 1 محيطيتان

والواحد محيطية لـ M لكن ليست محيطية بالنسبة لـ R^n

نتيجة: في الفضاء المترِي الحقيقي المألوف يكون طرفا المجال من أي نوع كان عبارة عن نقاط محيطية بالنسبة له.

---

* **تعريف النقطة الملاصقة**: نقول عن $x_0 \in \mathbb{R}^n$ أنها نقطة ملاصقة للمجموعة $M \subseteq \mathbb{R}^n$ إذا تقاطع كل جوار U لـ x_0 مع المجموعة M أي:

x_0 ملاصقة $\Longleftrightarrow$ $\forall U = U(x_0),\ U \cap M \neq \emptyset$

ونسمي مجموعة النقاط الملاصقة لـ M بلصاقة M ونرمز لها بـ $\overline{M}$

ملاصقة $\Leftarrow$ تراكم

غير تراكم $\Leftarrow$ غير ملاصقة

نتيجة - ملاحظة

إن كل نقطة تجمّع هي نقطة ملاصقة. x_0 نقطة تجمع ⟸ x_0 نقطة ملاصقة.

مثال: يبين أن العكس غير صحيح. $M =]-1, 1] \cup \{2\}$

2 نقطة ملاصقة. 2 ليست نقطة تجمع لأن:

$]\frac{3}{2}, \frac{5}{2}[$ جوار للنقطة 2

$]-1, 1] \cup \{2\} \cap (]\frac{3}{2}, \frac{5}{2}[- \{2\}) = \emptyset$

فالـ 2 ملاصقة لأن: $]\frac{3}{2}, \frac{5}{2}[$ جوار لـ 2

* **تعريف النقطة المنعزلة**:

لتكن $M \subseteq \mathbb{R}^n$ و $x_0 \in \mathbb{R}^n$ نقول عن x_0 إنها منعزلة في M إذا وجد جوار لـ x_0 بحيث

$\exists U = U[x_0],\ U \cap M = \{x_0\}$

ملاحظة: في المثال السابق النقطة $\{2\}$ هي نقطة منعزلة لأنه ثبت أنها نقطة...

مثال: $M = [0, 1[\cup \{2\}$

2 منعزلة

«يارب كن معنا»

$M \cup U =]\frac{3}{2}, \frac{5}{2}[\cap]-1, 1[\cup \{2\}$

$= \emptyset \cup \{2\} = \{2\} \neq \emptyset$

/ /

١) المتتاليات في الفضاء الإقليدي $\|\mathbb{R}^n\|$

هي دالة منطلقها مجموعة الأعداد الصحيحة ومستقرها $\mathbb{R}^n$ أي:

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \longmapsto f(x) = x_m \in \mathbb{R}^n$$ صورتها هي متجهة تمثل نقطة

$$\{x_m\} = (x_m^1, x_m^2, \dots x_m^n)$$ عناصر المتتالية

أو $x_m : x_{m_1}, x_{m_2}, \dots x_{mn}$

كل مركبة

أو : $x_{1m}, x_{2m}, \dots x_{nm}$

تعريف تقارب متتالية بالفضاء $\mathbb{R}^n$:

عدد حقيقي موجب   عدد طبيعي له علاقة مع ε

$$\left.(\forall \varepsilon>0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, m \geq N_\varepsilon \Rightarrow \|x_m - x\| < \varepsilon)\right\} \star$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{m\to\infty} x_m = x$$

انتباه هنا نظيم
في IR القيمة مطلقة
ولكن في $\mathbb{R}^n$ وضعنا نظيم

نقول عن المتتالية x_n أنها متقاربة في الفضاء $\mathbb{R}^n$ من العنصر $x \in \mathbb{R}^n$
إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي ★

مبرهنة: الشرط اللازم والكافي كي تتقارب المتتالية $\{x_m\}$ في $\mathbb{R}^n$
من العنصر $x \in \mathbb{R}^n$ هو أن تتقارب المتتالية الحقيقية
$\{x_{1m}\}, \{x_{2m}\}, \dots \{x_{nm}\}$ من الأعداد $x_1, x_2, \dots x_n$

أي: تتقارب $\{x_m\}$ من $x \in \mathbb{R}^n \Longleftrightarrow$

$$\{x_{1m}\}, \{x_{2m}\}, \dots \{x_{nm}\}$$

من الأعداد $x_1, \dots x_2, \dots x_n$

"$\Leftarrow$" **البرهان:** نفرض أن $\{x_m\}$ متقاربة من X

حسب تعريف التقارب:

$$\forall \varepsilon>0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, m \geq N_\varepsilon \Longrightarrow \|x_m - x\| < \varepsilon$$

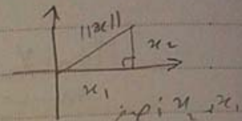
وحسب تعريف النظيم في $\mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_{im}-x_i)^2 < \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow (x_{im}-x_i) < (x_{1m}-x_1)^2 + (x_{2m}-x_2)^2 + \dots + (X_{nm}-X_n)^2 < \varepsilon^2$$

أي حد من المجموعة أصغر من المجموع

$$\Rightarrow |x_{im}-x_i| < \varepsilon$$



x_1, x_2 أصغر من النظيم حسب فيثاغورث

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} , m \geq N_\epsilon \Rightarrow |x_{im}-x_i| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} x_{im} = x_i$$

العكس: "$\Rightarrow$"

لنفرض أن $\{x_{im}\} \xrightarrow[m\to\infty]{} x_i$ حيث $(i=1,2,\dots n)$

بدي برهن $\{X_m\} \xrightarrow[m\to\infty]{} X$

$$\lim_{m\to\infty} x_{im} = x_i \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 ; \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} > 0$$ موجب

$$\exists N_{i\epsilon} \in \mathbb{N} ; |x_{im}-x_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

$$|X_{1m}-X_1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \wedge |X_{2m}-X_2| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \wedge \dots \wedge |X_{nm}-X_n| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

« الشرط الغالب إجباري لازم يكون واحد منهم »

نفرض $N_\epsilon = \max(N_{1\varepsilon}, N_{2\varepsilon}, \dots N_{n\varepsilon})$

« انتبهنا ع جذر n »

$$(X_{1m}-X_1)^2 + (X_{2m}-X_2)^2 + \dots + (X_{nm}-X_n^2) < \varepsilon^2$$

$\frac{\varepsilon^2}{n} + \dots + \frac{\varepsilon^2}{n}$ لأنهم $\frac{n\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} (X_{im}-X_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

$\Longrightarrow \| x_m - x \| < \varepsilon \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \; ; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; ; m \geq N_\varepsilon \Longrightarrow \| x_m - x \| < \varepsilon \Longrightarrow$

$$\lim_{m \to \infty} x_m = x$$

ملاحظة:

إن مسائل التقارب في $\mathbb{R}^n$ يمكن ردّها إلى مسائل مماثلة في $\mathbb{R}$ لكل من احداثيات المتتاليات $\mathbb{R}^n$.

نتائج: (دون برهان)

1. كل متتالية متقاربة تملك نهاية وحيدة. ⟵ نظرية ليست فيه مطلقة
2. " " " محدودة. (لازم نخط ($\| \; \| < k$))
3. الشرط اللازم والكافي لتقارب متتالية في $\mathbb{R}^n$ من العنصر x هو أن يحوي أي جوار لـ x جميع عناصر المتتالية باستثناء عدد منته منها.
4. الشرط اللازم والكافي كي تكون x نقطة حدية للمجموعة الجزئية M من $\mathbb{R}^n$ هو أن توجد متتالية من عناصر المجموعة $M - \{x\}$ متقاربة من x. (لأن النقطة الحدية مش النقطة)
5. الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة الجزئية $M \in \mathbb{R}^n$ مغلقة في $\mathbb{R}^n$ هو أن تكون لكل متتالية متقاربة من عناصر M نهاية في M.

"مبرهنة"

ليكن لدينا متتاليتين متقاربتين.

$\{x_n\}$ متقاربة من x

$\{y_n\}$ متقاربة من y فإن $\lim_{m \to \infty} (x_n \mp y_n) = x \mp y$

البرهان: غير مطلوب

$\| (x_m - x) + (y_m - y) \| \leq \| \; \| + \| \; \| < \varepsilon$ متراجحة المثلث