المحاضرة السابعة عشرة — الأربعاء 7/5/2014

الحالة الثالثة: حساب التكاملات من الشكل:

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos mx\ f(x)\,dx$$

$$I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin mx\ f(x)\,dx$$

حيث $f(x)$ تابع كسري معرّف على: $\mathbb{R}-\{b_1,\ldots,b_m\}$ و $b_1,\ldots,b_m$ أصفار من المرتبة الأولى لـ $f(x)$.

مبرهنة: بفرض $f(z)$ تابع تحليلي في النصف العلوي من المستوي العقدي باستثناء عدد منته من الأقطاب $a_1,\ldots,a_n$ واقعة تماماً فوق المحور الحقيقي و $b_1,\ldots,b_m$ أقطاب بسيطة واقعة على المحور الحقيقي وبفرض: $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$ عندئذ:

$$\boxed{I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos mx\ f(x)\,dx=Re\Big[2\pi i\sum_{k=1}^{n}Res\left(e^{imz}\cdot f(z),a_k\right)+\pi i\sum_{k=1}^{N}Res\left(e^{imz}\cdot f(z),b_k\right)}$$

"حفظ"

$$\boxed{I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin mx\ f(x)\,dx=Im\Big[2\pi i\sum_{k=1}^{n}Res\left(e^{imz}\cdot f(z),a_k\right)+\pi i\sum_{k=1}^{N}Res\left(e^{imz}\cdot f(z),b_k\right)}$$

"حفظ"

تمرين: باستخدام نظرية الرواسب احسب التكاملات الحقيقية التالية:

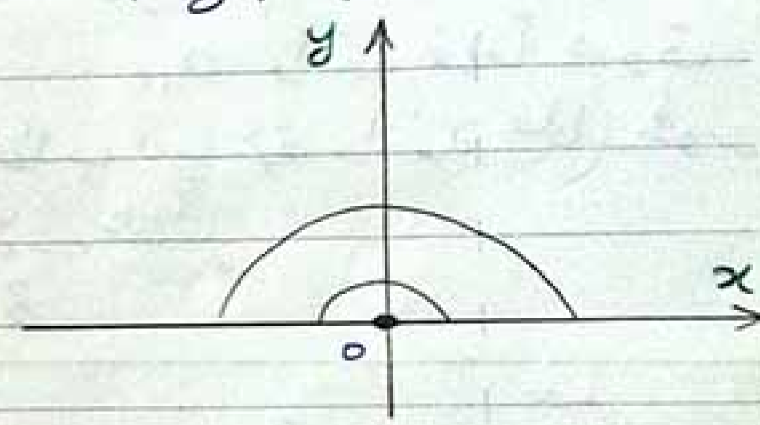
$\boxed{1}$ $I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx\ ,\ I_1'=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx$

الحل: نضع $f(z)=\frac{1}{z}$ فنلاحظ أن للتابع $f(z)$ قطب بسيط $a=0$
وليس له أقطاب في النصف العلوي من المستوي العقدي، كذلك:
$\lim_{z\to\infty} f(z)=0$ ، ومنه:

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\operatorname{Im}\left[\pi i\,\operatorname{Res}\left(e^{iz}f(z),0\right)\right]$$

$$\operatorname{Res}\left(e^{iz}f(z),0\right)=\lim_{z\to 0}e^{iz}=1$$

$$\Rightarrow I_1=\operatorname{Im}\left(\pi i(1)\right)=\pi\ ,\ I_1'=0$$



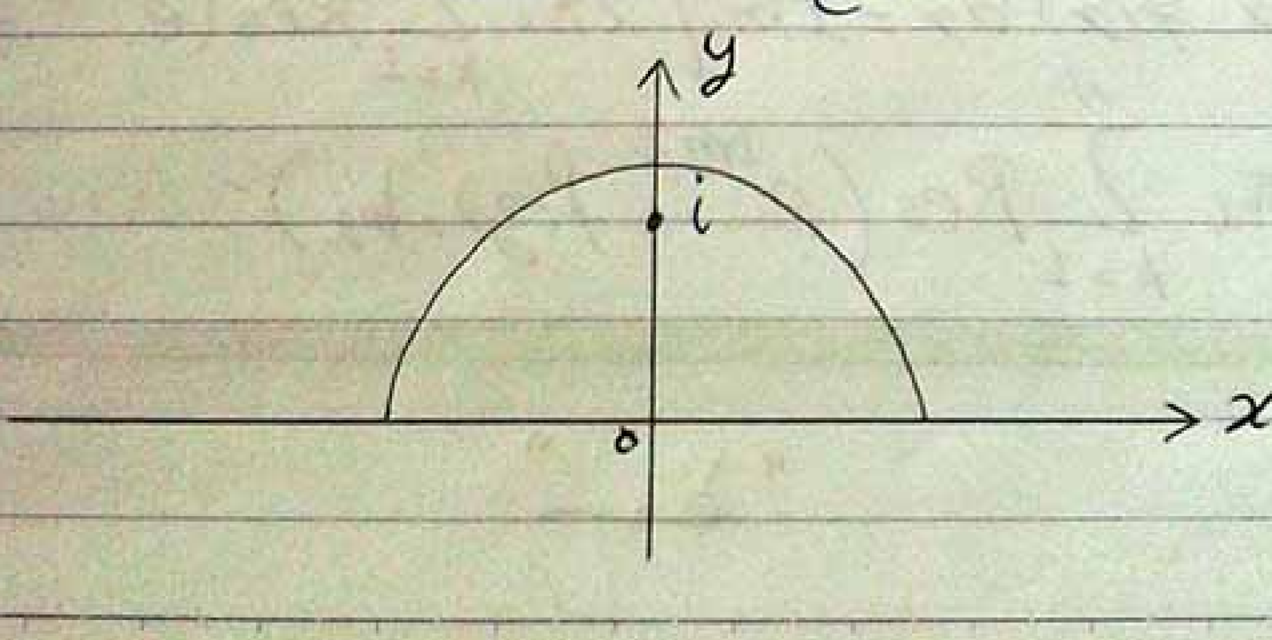
$\boxed{2}$ $I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+1}$

لو كان جيب لكان التابع فردي وقيمة التكامل تساوي الصفر

الحل: نضع $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ فنجد:

$$\operatorname{Res}\left(e^{i2z}\cdot f(z),i\right)=\lim_{z\to i}\frac{e^{i2z}}{z+1}=\frac{e^{-2}}{2i}=\frac{1}{2ie^2}$$

$$\Rightarrow I_2=\operatorname{Re}\left(2\pi i\left(\frac{1}{2ie^2}\right)\right)=\frac{\pi}{e^2}$$



$\boxed{3}$ $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x \sin \pi x}{x^2+2x+5}\, dx$

الحل:

نضع $f(z) = \dfrac{z}{z^2+2z+5}$ ، نلاحظ أن للتابع $f(z)$ قطب بسيط فوق المحور الحقيقي وهو: $-1+2i$ ومنه:

$$Res\left(e^{i\pi z} \cdot f(z), -1+2i\right) = \lim_{z \to -1+2i} \frac{e^{i\pi z} \cdot z}{z^2+2z+5} \to (z-z_1)(z-z_2)$$

$z_1 = -1+2i$

$z_2 = -1-2i \to$ مرفوض

$$= \frac{e^{i\pi(-1+2i)} \cdot (-1+2i)}{4i}$$

$$= \frac{e^{-i\pi} \cdot e^{-2\pi} \cdot (-1+2i)}{4i} = \frac{1-2i}{e^{2\pi} \cdot 4i}$$

$$\to I_3 = Im\left(2\pi i \left(\frac{1-2i}{e^{2\pi} \cdot 4i}\right)\right) = \frac{-\pi}{e^{2\pi}}$$ (عدد حقيقي)

$\boxed{4}$ $I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x(x^2+1)^2}$

الحل: نضع $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+1)^2}$ ، نلاحظ أن: 0 قطب بسيط وأن i قطب مضاعف لـ $f(z)$

$$Res\left(e^{iz} \cdot f(z), 0\right) = \lim_{z \to 0} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} = 1$$

$$Res\left(e^{iz} \cdot f(z), i\right) = \lim_{z \to i} \left(\frac{e^{iz}}{z(z+i)^2}\right)'$$ نفك المطابقة وندخل z

$$= \lim_{z \to i} \frac{ie^{iz} \cdot z(z+i)^2 - (3z^2+4iz-1)\, e^{iz}}{z^2(z+i)^4}$$

ملاحظة هامة: يجب ذكر القانون في الامتحان...

$$= \frac{1}{e}\left[\frac{i.i(2i)^2-(-3-4-1)}{i^2(2i)^4}\right] = \frac{-3}{4e}$$

$$\rightarrow I_4 = Im\left(2\pi i\left(\frac{-3}{4e}\right)+\pi i(1)\right) = \frac{-3\pi}{2e}+\pi$$

$\boxed{5}$ $I_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2-\frac{\pi^2}{9}}\,dx$

الحل:

نضع $f(z) = \frac{1}{z^2-\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}$ نلاحظ: $\mp\frac{\pi}{3}$ قطب مضاعف لـ $f(z)$.

$$Res\left(e^{iz}.f(z),\frac{\pi}{3}\right) = \lim_{z\to\frac{\pi}{3}} \frac{e^{iz}}{z+\frac{\pi}{3}} = \frac{3+3\sqrt{3}i}{4\pi}$$

$$Res\left(e^{iz}.f(z),-\frac{\pi}{3}\right) = \lim_{z\to-\frac{\pi}{3}} = \frac{e^{iz}}{z-\frac{\pi}{3}} = \frac{-3+3\sqrt{3}i}{4\pi}$$

$$\rightarrow I_5 = Re\left(\pi i\left(\frac{3+3\sqrt{3}i}{4\pi}+\frac{-3+3\sqrt{3}}{4\pi}\right)\right)$$

$$= Re\left(\pi i\left(\frac{3\sqrt{3}i}{2\pi}\right)\right) = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$$

* وظيفة: احسب التكاملات الحقيقية التالية:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(3x+1)\sin 2x}{x^2+1}\,dx$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+4x+5}\,dx$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 4x}{x(x^2+1)}\,dx$$

انتهت المحاضرة السابعة عشرة