33 م

تعريف: إنّ المستقيم الواصل بين النقطتين $x, y \in S \subset \mathbb{R}^n$ هو مجموعة النقاط

$$L = \{ x + t(y-x) : \quad t \in [0, 1] \}$$

إذا كانت $x_1, x_2, \dots x_n$ نقاطاً في $\mathbb{R}^n$ ولتكن

$(L_1, L_2, \dots L_{n-1})$ القطع المستقيمة الواصلة بين النقطتين

x_i, x_{i+1} حيث $i = 1, 2, \dots n-1$ (نأخذ L عدد $n-1$ أصغر من n)

عندئذٍ: نقول عن الجماعة $L_1, L_2, \dots L_{n-1}$ بأنها تشكل خطاً مضلعاً

يصل بين النقطتين $x_1 \longrightarrow x_n$.

مبرهنة: المجموعتان الوحيدتان المفتوحتان والمغلقتان بآنٍ واحد

هما الـ $\emptyset$ والـ $\mathbb{R}^n$.

$\emptyset$: مفتوحة لأنّ جميع نقاطها داخلية (لأنها لا توجد ولا كرة مفتوحة محتواة بـ $\emptyset$

لأن $\emptyset$ لا تحوي أيّ عنصر x بحيث تكون مركزاً لكرة تنتمي إلى $\emptyset$)

$\mathbb{R}^n$: لأنّ جميع نقاطها داخلية لذلك مفتوحة.

تذكرة: x داخلية إذا وجدت كرة مفتوحة مركزها النقطة x ومحتواة في $\mathbb{R}^n$.

- إثبات أن $\mathbb{R}$ و $\emptyset$ وحيدتان

لنفرض جدلاً وجود $\emptyset \neq S \neq \mathbb{R}^n$ مغلقة ومفتوحة بآنٍ واحد.

S مفتوحة $\Leftarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus S$ مغلقة (متممتها) — نفترض أنه يوجد مجموعة مفتوحة ومغلقة بآنٍ واحد غير $\emptyset, \mathbb{R}^n$ لنصل لتناقض

S مغلقة $\Leftarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus S$ مفتوحة (متممتها).

إنّ المجموعتين S و $\mathbb{R}^n \setminus S$ تشكلان فصلاً لـ $\mathbb{R}^n$ لأنّ — أي أن المفتوحتين تشكلان فصلاً لـ $\mathbb{R}^n$ ناقص ما بعدهما

$$\mathbb{R}^n \cap S = S \neq \emptyset$$

$$\mathbb{R}^n \cap (\mathbb{R}^n \setminus S) = S^c \neq \emptyset$$

$$(\mathbb{R}^n \cap S) \cap (\mathbb{R}^n \cap (\mathbb{R}^n \setminus S)) = S \cap S^c = \emptyset$$

$$(\mathbb{R}^n \cap S) \cup (\mathbb{R}^n \cap (\mathbb{R}^n \setminus S)) = S \cup S^c = \mathbb{R}^n$$ — ملاحظة سابقة

$\Leftarrow$ $\mathbb{R}^n$ غير مترابطة وذلك يناقض $(\mathbb{R}^n)$ مترابطة

$\Leftarrow$ $\mathbb{R}^n$, $\emptyset$ مجموعتان مغلقتان ومفتوحتان بآنٍ واحد

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ غير مترابطة — مفتوحتان u, v

$u \cap S \neq \emptyset$

$v \cap S \neq \emptyset$

$(u \cap S) \cap (v \cap S) = \emptyset$

$(u \cap S) \cup (v \cap S) = S$

إذا تحققت هذه الشروط تكون u, v فصلاً منفصلاً

تمرين: برهن أنه إذا كانت A متراصة في $\mathbb{R}^n$ وكانت B مجموعة جزئية مغلقة في A، فإن B مجموعة متراصة في $\mathbb{R}^n$.

A متراصة $\Longleftrightarrow$ (حسب بوريل) A مغلقة ومحدودة $\Longrightarrow$ B محدودة (لأن A محدودة وB جزئية منها محدودة أيضاً)

B جزئياً مغلقة $\Longrightarrow$ B مغلقة ومحدودة $\Longleftarrow$ B متراصة.

"الأ مجموعة متراصة تكون مغلقة ومحدودة"

نهايات الدوال الحقيقية لعدة متغيرات:

تعريف: لتكن f دالة معرّفة على مجموعة جزئية $S \subseteq \mathbb{R}^n$ مستقرها $\mathbb{R}$

$f: S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ولتكن x_0 نقطة حدّية (تراكم) للـ S

ولتكن A عدد حقيقياً، نقول عن — هام لتعريف نهاية الدالة.

$$\forall \epsilon>0 : \exists \delta>0 : 0<\|x-x_0\|<\delta \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

$x \neq x_0$ لا يكتب من أولي — لأن نقطة حدية

"التعريف يحفظ مشان تعرفوا شلي بالبال"

$$|f(x)-A|<\epsilon$$

الدالة — النهاية

* تعريف آخر لنهاية دالة بدلالة المتتاليات:

لتكن لدينا الدالة f المعرّفة على مجموعة جزئية $S \subseteq \mathbb{R}^n$، ولتكن x_0 نقطة حدّية لـ S، A عدد حقيقي عندئذٍ نقول عن

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow$$

المستقر | متتالية | متتالية المنطلق

"يستخدم هذا التعريف لإثبات عدم وجود نهاية"

* كل متتالية من المنطلق تقابلها متتالية من المستقر عناصرها مختلفة عن x_0 ومتقاربة من x_0، تقابلها متتالية $\{f(x_m)\}$ من المستقر متقاربة من $f(x_0)$

$$\{X_m\} \longrightarrow \{f(x_m)\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

(يستخدم عدم وجود نهاية هذا التعريف لإثبات)

تعريف جمع وضرب وقسمة دوال حقيقية : لدينا الدالتين f , g

$$f : S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}}$$
$$g : T \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}}$$

((انتباه ، المستقر $\mathbb{R}$ دالة حقيقية))

$$f+g : S \cap T \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$f.g : S \cap T \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (f.g)(x) = f(x).g(x)$$

$$\frac{f}{g} : S \cap T \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

عدا النقاط التي تعدم الدالة g

$$x \longmapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

مبرهنة :- لتكن f و g دالتان حقيقيتان ، ولتكن x_0 نقطة حدية لـ $S \cap T$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad , \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = B$$

عندئذ

1) $$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$
$$= A + B.$$

2) $$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B} \quad (B \neq 0 \, , \, g(x) \neq 0)$$

برهنها في المحاضرة 9

برهان (1)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff$$

حسب تعريف نهاية دالة حقيقية ،

$\forall \varepsilon > 0;\ \frac{\varepsilon}{2} > 0 : \exists \delta_1 > 0 : 0 < \|x - x_0\| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = B \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0;\ \frac{\varepsilon}{2} > 0;\ \exists \delta_2 > 0$

$: 0 < \|x - x_0\| < \delta_2$

$\Rightarrow |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$

«Look it» is أصغر العددين يحقق (1) و (2)

$\forall \varepsilon > 0;\ \exists \delta = \min|\delta_1, \delta_2| \quad 0 < \|x - x_0\| < \delta$

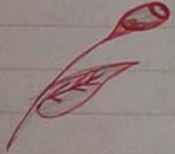
$\Rightarrow |(f(x) - A) + (g(x) - B)| < |f(x) - A| + |g(x) - B|$

$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$|(f+g)(x) - (A+B)| < \varepsilon$

$\lim (f+g) = A + B$ #

" انتهت المحاضرة 8 "



يتم برهان القاعدة $\boxed{2}$ في المحاضرة القادمة: