Subject : .....

$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$ ⑤ لإيجاد المسافة نأخذ العلاقة الأفقية من

ونعوض في العلاقة الثالثة من ⑤ $z = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}\right) + v_0 \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right) \sin\alpha$

وبالتالي $\boxed{z = -\frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} + x \tan\alpha}$ ⑥

وهي معادلة المسار والتي تمثل قطع مكافئ محوره $o\vec{z}$ يوازي

لإيجاد المدى: إيجاد أقصى مدى تصله القذيفة (النقطة المادية) لذلك نجعل $z = 0$ في العلاقة ⑥ (أي المحور $o\vec{x}$)

$x\left(\tan\alpha - \frac{g x}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}\right) = 0$

الحلان: إما $x_1 = 0$ وهي نقطة القذف (البدء)

أو $x_2 = \frac{2 v_0^2 \cos^2\alpha \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{g} = \frac{2 v_0^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g}$

$\Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}} \leftrightarrow$ [معادلة المدى]

وتبلغ القذيفة أقصى مدى عندما تكون الزاوية $\alpha = \frac{\pi}{2}$ والحالة الناسبة

لإيجاد الذروة: نشتق z بالنسبة لـ x ونساويها للصفر

نوجد x وهي فاصلة النقطة لأعلى ارتفاع ثم نعوضها في ⑥ فنحصل على أعلى ارتفاع لـ z.

(أي: z_{max} أبعد مسافة شاقولية يصلها النقطة المادية)

لإيجاد الذروة نأخذ $\frac{dz}{dx} = 0$ (ميل المسار عند نقطة الذروة)

$\frac{dz}{dx} = \tan\alpha - \frac{g x}{v_0^2 \cos^2\alpha} = 0$

من هذه العلاقة نوجد x_* عندئذ $\tan\alpha = \frac{g x}{v_0^2 \cos^2\alpha}$

$g x = v_0^2 \cos^2\alpha \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\Rightarrow x_* = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$

حيث x_* فاصلة النقطة التي تكون عندها z_{max} أي أعلى مسافة على محور $o\vec{z}$ (الذروة)

نعوض في معادلة المسار $z^* = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{g\left(\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}$

Subject : ..... / /

$$z^* = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$ بعد الاصلاح نجد أن

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ وتبلغ القذيفة الذروة عندما تكون الزاوية هي

(3) إيجاد الزمن اللازم لوصول النقطة المادية إلى أبعد مسافة على المحور $\overrightarrow{ox}$

من العلاقة الأولى في المعادلات (5)

$x = v_0 t \cos\alpha$

$\Rightarrow T = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$

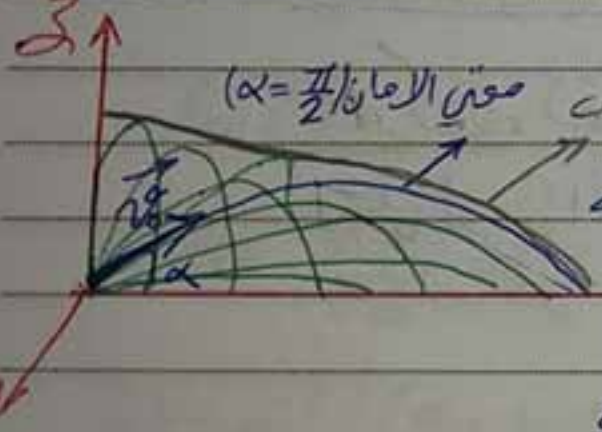
الزمن اللازم T و لوصول النقطة لأبعد مدى

نعوض T في علاقة أقصى مدى للقذيفة والتي هي $x_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

$$\Rightarrow T = \frac{\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}}{v_0 \cos\alpha} = \frac{2 v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g \, v_0 \cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}}$$ الزمن اللازم لوصول النقطة المادية إلى أعظم مدى على المحور $\overrightarrow{ox}$

(4) معنى الأمان



رأينا أنه عند رمي أطلق النقطة المادية بسرعة معينة فإن مساراتها هي عبارة عن قطوع مكافئة تقع في المستوى oxz وبالتالي فإن القطع المكافئ الذي يمثل جميع هذه القطوع يسمى بمغلف القطوع ومنه فإن هذا المغلف يحدد المنطقة الخطرة من المنطقة التي تكون بأمن من خطر الإصابة (القذائف)، لذلك ندعوه بمعنى الأمان

أيجاد معادلة المغلف:

لنفرض أن $Z = F(\alpha, x)$ هي معادلة عائلة المغلف

ولإيجاد المعادلة لها نتخلص من الوسيط α.

نشتق بالنسبة للوسيط α $\frac{dz}{d\alpha} = 0$

وفي هذه الحالة المدروسة لدينا نأخذ الوسيط $P = \tan\alpha$ ومنه فإن

$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha = 1 + P$ ومنه فإن

Subject : .....

$$Z = x\tan\alpha - \frac{g x^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$$

$$Z = x\cdot P - \frac{g(x)^2}{2v_0^2}(1+P^2) \quad (I)$$

$$\frac{dZ}{dP} = x - \frac{g x^2 P}{v_0^2} = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{gPx^2}{v_0^2} \Rightarrow x v_0^2 = gPx^2$$

$$\Rightarrow P = \frac{x v_0^2}{g x^2} \Rightarrow \boxed{\frac{v_0^2}{gx} = P}$$

$$Z = x\cdot\frac{v_0^2}{gx} - \frac{gx^2}{2v_0^2}\left(1+\frac{v_0^4}{g^2x^2}\right) \leftarrow (I) \text{ نعوض}$$

بعد الاختصار نجد $\boxed{Z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2}$ معادلة المنحنى

حركة نقطة مادية ثقيلة في وسط مقاوم

لتكن لدينا النقطة المادية M كتلتها m تتحرك وسط مائع مقاومته من الشكل $\vec{R} = -mk\vec{v}$; k ثابت يتعلق بطبيعة المائع وكتلة النقطة المتحركة

$$\begin{cases} mx'' = -mkx' \\ mz'' = -mg - mkz' \\ y \text{ لا يوجد مركبة} \end{cases}$$

نقسم على m :

$$x'' = -kx' \quad (1)$$
$$z'' = -g - kz' \quad (2)$$

نأخذ المعادلة (1) $x'' = -kx' \rightarrow \frac{dx'}{dt} = -kx'$

$$\Rightarrow \frac{dx'}{x'} = -k\,dt \rightarrow \ln x' = -kt + C$$

نعين C من شرط البدء $t=0 \Leftarrow C = v_0\cos\alpha \Leftarrow C = \ln(v_0\cos\alpha)$

$$\Rightarrow \ln|x'| = -kt + \ln|v_0\cos\alpha|$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{x'}{v_0\cos\alpha}\right| = -kt \Rightarrow \frac{x'}{v_0\cos\alpha} = e^{-kt}$$

$$\Rightarrow x' = v_0\cos\alpha\, e^{-kt}$$

Subject : .....

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha\, e^{-kt}$$

$$dx = v_0 \cos\alpha \cdot e^{-kt}\, dt \Rightarrow x = -\frac{1}{k} v_0 \cos\alpha\, e^{-kt} + C_2$$

عند الشرط البدئي $x=0,\ t=0$ نجد $C_2 = \frac{v_0}{k}\cos\alpha$

$$\Rightarrow x = -\frac{v_0}{k}\cos\alpha\, e^{-kt} + \frac{v_0}{k}\cos\alpha$$

$$\boxed{x = \frac{v_0}{k}\cos\alpha\,(1 - e^{-kt})}$$ معادلة الحركة على المحور $\overrightarrow{Ox}$

$$z'' = -g - kz' \Rightarrow \frac{dz'}{dt} = -g - kz'$$ نأخذ المعادلة:

$$\Rightarrow \frac{k\,dz'}{g + kz'} = -k\,dt \Rightarrow \ln(g + kz') = -kt + C$$

عند الشرط البدئي $t=0 \Rightarrow z' = v_0 \sin\alpha$

$$C = \ln(g + kv_0 \sin\alpha)$$

$$\ln(g + kz') = -kt + \ln(g + kv_0 \sin\alpha)$$

$$\ln \frac{g + kz'}{g + kv_0 \sin\alpha} = e^{-kt} \Rightarrow \frac{g + kz'}{g + kv_0 \sin\alpha} = e^{-kt}$$

$$z' = \frac{e^{-kt}(g + kv_0 \sin\alpha) - g}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{-g}{k} + \frac{(g + kv_0 \sin\alpha)e^{-kt}}{k} = \frac{1}{k^2}\left[e^{-kt}(g + kv_0 \sin\alpha) - g\right]$$

$$dz = \frac{1}{k^2}\left[e^{-kt}(g + kv_0 \sin\alpha)\,dt\right] - \frac{1}{k^2} g\,dt$$

$$z = -\frac{1}{k} e^{-kt}(g + kv_0 \sin\alpha) - \frac{g}{k^2} t$$

$$z = \frac{1}{k^2}\left(g + kv_0 \sin\alpha\,(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t\right)$$ ← معادلة الحركة على $\overrightarrow{Oz}$

معادلة حركة نقطة مادية في حقل ثقالي.