8/5/2014

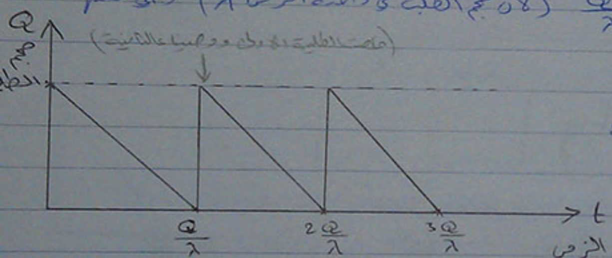
المحاضرة $\boxed{12}$ عملي

النموذج السكوني بدون عجز ولمادة واحدة

فرضيات هذا النموذج:

1) حجم الطلبية: الثابت Q
2) حجم الطلب على المخزون في واحدة الزمن λ..
3) التكلفة الثابتة لإعداد الطلبية $c_1 = k$
4) تكلفة الشراء والتوصيل والاستلام $C_2 = C.Q$
5) تكلفة التخزين خلال واحدة الزمن للكمية المتبقية في المستودع C_3 (مجهولة)
6) مدة نفاذ الكمية المخزنة $\frac{Q}{\lambda}$ (لأن حجم الطلب في واحدة الزمن λ) وهي نفسها مدة الدورة التخزينية

نمثل حركة المخزون بالرسم التالي:



نرمز للكمية المتبقية في المستودع في اللحظة t وخلال الفترة الأولى $\left[0, \frac{Q}{\lambda}\right]$ بالرمز q_t

عندئذ q_t تعطى بالعلاقة التالية: $q_t = Q - \lambda t$

- وحتى نستطيع حساب تكلفة التخزين نجزء المجال الزمني من $0 \to \frac{Q}{\lambda}$ إلى n مجال جزئي طول كل منها Δt

إذا كان t_i هي نقطة ما من المجال الجزئي Δt_i، فإن الكمية المتبقية من المخزون المقابلة لذلك المجال الجزئي تساوي $q_i = Q - \lambda t_i$

وبذلك نجد أن تكلفة التخزين خلال ذلك المجال الجزئي تساوي $c_i = h q_i \Delta t$

وعليه تكون تكلفة التخزين الكلية خلال الفترة $\left[0, \frac{Q}{\lambda}\right]$ (سنكتب Δt_i عندما تكون التجزئة غير منتظمة)

تساوي مجموع الكلف الجزئية وتساوي تقريباً:

$$C_3 = \sum_{i=1}^{n} h(Q - \lambda t_i)\Delta t.$$

عندما تنتهي Δt إلى الصفر فإن عدد المجالات الجزئية : $n \longrightarrow \infty$

والمجموع السابق ينتهي إلى التكامل على المجال $\left[0, \frac{Q}{\lambda}\right]$

$$C_3 = \lim_{n \to \infty} h(Q - \lambda t)\Delta t = \int_0^{\frac{Q}{\lambda}} h(Q - \lambda t)\, dt$$

$$= \left[hQt - h\frac{\lambda t^2}{2}\right]_0^{\frac{Q}{\lambda}} = \frac{hQ^2}{2\lambda}$$

وهي التكلفة العامة للتخزين (مجمل تكاليف التخزين)

وتكون التكلفة الإجمالية للتخزين خلال الفترة $\left[0, \frac{Q}{\lambda}\right]$ في حال عدم العجز تساوي

مجموع الكلف الثابتة والمتغيرة وكلفة التخزين $C = C_1 + C_2 + C_3$

$$= k + cQ + \frac{hQ^2}{2\lambda}$$

$$\boxed{TC(Q) = k + c.Q + \frac{hQ^3}{2\lambda}}$$

ولكي نحصل على تكلفة التخزين الكلية في واحدة الزمن نقسم $TC(Q)$ على طول الفترة $\frac{Q}{\lambda}$ ونرمز للناتج بالرمز $C(Q)$

$$C(Q) = \frac{k.\lambda}{Q} + c.\lambda + \frac{hQ}{2}$$

ولإيجاد الحجم المثالي للطلبية بحيث تكون تكلفة التخزين أقل ما يمكن نقوم بإيجاد :

$$\frac{dC(Q)}{dQ} = -\frac{k\lambda}{Q^2} + \frac{h}{2} \underset{\uparrow}{=} 0$$

نساويه بالصفر

$$Q^2 = \frac{2k\lambda}{h} \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2k\lambda}{h}}$$

أي أن حجم الطلبية المثالي الذي يجعل تكلفة التخزين أصغر ما يمكن $Q^* = \sqrt{\frac{2k\lambda}{h}}$

الإثبات :

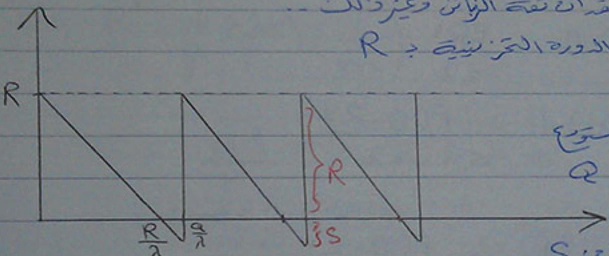
لنتأكد من أن النقطة السابقة تقابل نهاية صغرى نأخذ المشتق الثاني :

$$\frac{\partial^2 C(Q)}{\partial^2 Q^2} = \frac{2\lambda}{Q^3} > 0$$

بما أن المشتقة الثانية موجبة فإن Q^* تقابل نهاية صغرى للتابع $C(Q)$
وهي نقطة وحيدة لأن $Q>0$ ..

النموذج الساكن مع العجز لمادة واحدة

يستخدم هذا النموذج لتخزين بعض المواد القابلة للعطل أو الفساد مثل الاسمنت ، الحديد .. ويحدث العجز في المخزون عندما يكون حجم المخزون المستودع في بداية الدورة التخزينية أقل من حجم الطلب على المادة المخزونة خلال تلك الدورة ..
لذلك لمعالجة هذه الحالة نضيف إلى الفرضيات الأساسية السابقة فرضية جديدة هي أن مقدار العجز المسموح به في كل دورة تخزينية يساوي مقداراً ثابتاً S ..
وتكلفة العجز يبلغ P لكل واحدة من الطلب غير المحقق خلال واحدة الزمن وهي تشمل غرامات التأخير وفقدان ثقة الزبائن وغير ذلك ..
نرمز لحجم المخزون المستودع في بداية الدورة التخزينية بـ R



ولحجم الطلبية التي ترد إلى المستودع في نهاية كل دورة نرمز لها بالرمز Q
حيث $R < Q$
ولمقدار العجز خلال كل دورة بالرمز S
عندها يكون : $S = Q - R$

والشكل المرافق يوضح حركة حجم المخزون في المستودع خلال كل دورة تخزينية ..
- نفرض أن λ هي معدل الطلب على المادة في واحدة الزمن فإننا نلاحظ أن حجم المخزون المستودع r يرتبط بالزمن بواسطة العلاقة : $q_r = R - \lambda t$
وأن مدة نفاذ المخزون تساوي $\frac{R}{\lambda}$
من مدة الدورة التخزينية : $\frac{R}{\lambda} < \frac{Q}{\lambda}$ وبذلك نجزأ المجال $[0, \frac{Q}{\lambda}[$ إلى المجالين جزئيين

فترة العجز ← $]\frac{R}{\lambda}, \frac{Q}{\lambda}[$ ، $[0, \frac{R}{\lambda}[$ ← فترة العمل.

نسمي المجال الأول: فترة العمل، ونسمي المجال الثاني فترة العجز

بالنسبة للتكاليف خلال فترة العمل يتم حسابها حسب النموذج السكوني بدون عجز

أما تكاليف التخزين خلال الفترة الثانية فيتم حسابها من جديد حيث:

$$C_4 = (-1)\int_{\frac{R}{\lambda}}^{\frac{Q}{\lambda}} P(R-\lambda t)\,dt = \frac{P(Q-R)^2}{2\lambda}$$

$$C_3 = \int_0^{\frac{R}{\lambda}} h(R-\lambda t)\,dt = \frac{hR^2}{2\lambda}$$

بصورة عامة إجمالي تكاليف التخزين في حالة النموذج السكوني مع عجز سيادي

تكاليف الطلبية C_1 + تكاليف الشراء C_2 + تكاليف التخزين خلال فترة العمل C_3

+ تكاليف العجز C_4 ،

حيث

$$C_1 = k \qquad C_2 = C.Q$$

$$C_3 = \int_0^{\frac{R}{\lambda}} h(R-\lambda t)\,dt = \frac{hR^2}{2\lambda}$$

$$C_4 = (-1)\int_{\frac{R}{\lambda}}^{\frac{Q}{\lambda}} P(R-\lambda t)\,dt = \frac{P(Q-R)^2}{2\lambda}$$

وعليه يكون إجمالي التكاليف:

$$TC(Q,R) = k + CQ + \frac{hR^2}{2\lambda} + \frac{P(Q-R)^2}{2\lambda}$$

$$C(Q,R)\ \boxed{\frac{TC(Q,R)}{\frac{Q}{\lambda}}} = \frac{\lambda k}{Q} + \lambda C + \frac{hR^2}{2Q} + \frac{P(Q-R)^2}{2Q}$$

لإيجاد حجم الطلبية المثالي Q^* وكذلك R^* اللذان يجعلان $C(Q,R)$ أصغر ما يمكن نطبق نماذج البرمجة اللاخطية وذلك وفق النموذج الآتي:

أوجد $L = C(Q,R) \rightarrow Min$

ضمن الشروط:

$$Q \geqslant R$$

$$Q \geqslant 0$$

$$R \geqslant 0$$

لإيجاد الحجم المثالي لـ Q^* و R نقوم بحساب المشتقات الجزئية للتابع $C(Q,R)$

$$\frac{\partial C(Q,R)}{\partial Q} = \frac{1}{Q^2}\left[-\lambda k - \frac{h k^2}{2} + P(Q-R)Q - \frac{1}{2}P(Q-R)^2\right]$$

$$\frac{\partial C(Q,R)}{\partial R} = 0 + 0 + \frac{2hR}{2Q} + \frac{2P(Q-R)(-1)}{2Q}$$

بتبسيط العلاقتين السابقتين نحصل على جملة المعادلتين

$$-\lambda k - \frac{h}{2}R^2 + P(Q-R)Q - \frac{1}{2}P(Q-R)^2 = 0$$

$$2hR - 2P(Q-R) = 0$$

بحل جملة المعادلتين السابقتين :

$$Q^* = \sqrt{\left(\frac{2\lambda k}{h}\right)\left(\frac{P+h}{P}\right)}$$

$$R^* = \sqrt{\left(\frac{2\lambda k}{h}\right)\left(\frac{P}{P+h}\right)}$$

$$Q^* = \frac{P+h}{P}R^* \quad , h>0 \Rightarrow \quad \frac{P+h}{P} > 1$$

ومنه $Q^* \geqslant R^*$

وهذا يعني أن $Q^* \geqslant R^*$ ، وهذا يعني أن الحلين المثاليين يحافظان على الشرط الأساسي وهو $Q \geqslant R$

من أجل إثبات أن الحل الناتج يقابل قيمة أصغرية للتابع $C(Q,R)$ نقوم بحساب مصفوفة هيسيان

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 C}{\partial Q^2} & \frac{\partial^2 C}{\partial Q \partial R} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial R \partial Q} & \frac{\partial^2 C}{\partial R^2} \end{bmatrix}$$

نلاحظ من المصفوفة الناتجة أن عناصرها القطرية موجبة ومتناظرة وحددها الأساسية الصغرى غير سالبة أي أن المصفوفة معرفة موجبة ، وبالتالي فالتابع تابع محدب والحل فعلي فالتابع محدب ، وعليه فإن هذه قيمة أصغرية

مسائل

1) أوجد نصف قطر قاعدة وارتفاع صهريج اسطواني الشكل إذا علمت أن مساحته الكلية $100\,m^2$ ، بحيث يكون حجمه أعظم ما يمكن

2) ينتج مصنع نوعان من السيارات A,B ، وتحسب تكلفة الإنتاج من خلال تكلفة المواد وتكلفة اليد العاملة ، فإذا علمت أن تكلفة المواد للنوع A هي مربع تكلفة اليد العاملة لنفس النوع ، وتكلفة المواد للنوع B هي ضعفي مربع تكلفة اليد العاملة لنفس النوع ومجموع تكلفتي اليد العاملة للنوعين A,B هي 75

المطلوب:

① صياغة نموذج رياضي لتحديد التكلفة الأصغرية للإنتاج

② إيجاد التكلفة المثلى لكل نوع.. (مواد ، يد عاملة)

3) ينتج مصنع نوعان من المواد الغذائية ، ويحتاج السوق إلى 200kg منهما يومياً فإذا علمت أن تكلفة إنتاج النوع الأول يساوي أربعة أمثال مربع الكمية المنتجة منه وتكلفة إنتاج النوع الثاني يساوي ستة أمثال مربع الكمية المنتجة منه مضافاً لها 20 مثل لهذه الكمية..

المطلوب:

① أوجد صياغة النموذج الرياضي للمسألة السابقة بحيث تكون تكلفة الإنتاج أصغرية

② إيجاد الكمية المنتجة لكل نوع

انتهت المحاضرة