تطبيقات الاشتقاق التفاضلي

القيمة العظمى نسبياً:

لتكن $f: D\subseteq R^n \to R$ ، $c \in D$ نقول عن الدالة f أنها في الموضع c تبلغ قيمة عظمى نسبياً، إذا وجد جوار U للنقطة c محتوى في D بحيث من أجل

$$\forall x \in U ; \quad f(x) \leq f(c).$$

القيمة الصغرى نسبياً:

لتكن $f: D\subseteq R^n \to R$ و $c \in D$ نقول عن الدالة f أنها في الموضع c تبلغ قيمة عظمى نسبياً، إذا وجد جوار U للنقطة c محتوى في D بحيث من أجل

$$\forall x \in U ; \quad f(c) \leq f(x)$$

القيمة العظمى المطلقة:

نقول عن الدالة f أنها تبلغ في الموضع c قيمة عظمى مطلقة

$$\forall x \in D ; \quad f(x) \leq f(c).$$

القيمة الصغرى المطلقة:

نقول عن الدالة f أنها في الموضع c تبلغ قيمة صغرى مطلقة إذا حققت الشرط التالي.

$$\forall x \in D ; \quad f(c) \leq f(x).$$

مبرهنة بدون برهان.

لتكن f معرفة على الشكل التالي $f: D\subseteq R^n \to R$.

ولتكن c من D وإن f تبلغ في الموضع c قيمة صغرى (عظمى)

ولنفترض أن المشتقات الجزئية الأولى في النقطة c موجودة.

فإن المشتقات محدودة $\frac{\partial f}{\partial x_i}(c) \quad i \in 1 .. n$ معدومة

$$\forall i \in 1 - n, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = 0$$

تعريف النقطة الحرجة:

لتكن $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$، ولنفرض أن $c \in D$ نقول عن c أنها نقطة حرجة للدالة f إذا تحقق الشرط التالي

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = 0 \quad , \quad i \in 1, \dots, n$$

ملاحظة:

إن المبرهنة السابقة تعطينا شرطاً لازماً وغير كافٍ حيث يمكن أن تنعدم المشتقات الجزئية جميعها ولا تكون لدينا في هذه النقطة قيمة قصوى.

$$c \text{ قصوى} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = 0$$

أما $\quad i = 1, \dots, n \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = 0 \not\Longrightarrow c$ قيمة قصوى

مثال: بيّن أن ليس كل النقطة الحرجة قيمة قصوى (عظمى أو صغرى)

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall (x, y) \longmapsto f(x, y) = x \cdot y .$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y .$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Longrightarrow y = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$\Longleftarrow (0,0)$ نقطة حرجة.

$$* \quad x > 0 \quad , \quad y > 0 \Longrightarrow x \cdot y > 0$$

$$f(x, y) > f(0, 0)$$

$\Longleftarrow (0,0)$ قيمة صغرى نسبية.

2) $x>0 , y<0 \Rightarrow x\cdot y<0$

$\Rightarrow f(x,y) < f(0,0)$

$(0,0)$ قيمة عظمى نسبية.

مبرهنة القيمة القصوى بالنسبة لدالة في متغيرين:

لتكن f دالة معرفة على $f: D\subseteq R^n \longrightarrow R$

ولنفرض أنها يوجد لهذه الدالة مشتقات جزئية مستمرة حتى المرتبة الثانية على D ولتكن (a,b) نقطة حرجة للدالة f ولنرمز

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$$

أو

$$= \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$$

نميز حالات:

1) $\Delta<0 , f_{xx}(a,b)>0 \Rightarrow$ (a,b) صغرى نسبياً

2) $\Delta<0 , f_{xx}(a,b)<0 \Rightarrow$ (a,b) عظمى نسبياً

3) $\Delta>0 \Rightarrow$ (a,b) ليست نقطة قصوى.

4) $\Delta=0 \Rightarrow$ فشل نستخدم المحاولات. (تعريف)

مثال: لتكن f :

$$f : R^2 \longrightarrow R$$
$$(x, y) \longrightarrow f(x,y) = x^4 + y^4$$

أوجد النقاط الحرجة ، وادرس إذا كانت النقاط الحرجة تمثل قيمة قصوى للدالة f.

الحل:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 4x^3 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 4y^3 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0 \Rightarrow y = 0.$$

نقطة حرجة $(0,0)$.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

حالة فشل نرجع على الجوارات.

صار $(0,0)$ نقطة حرجة بس مش قيمة صغرى

$$(0, \tfrac{\delta}{2}) \in N(\underbrace{(0,0)}_{\text{جوار } (0,0)}, \delta)$$

طلعت موجبة

صورة كبيرة

$$f(0, \tfrac{\delta}{2}) = \frac{\delta^4}{16} > 0 = f(0,0)$$

$$(0, -\tfrac{\delta}{2}) \in N((0,0), \delta)$$

$$f(0, \tfrac{-\delta}{2}) = \frac{\delta^4}{16} > f(0,0).$$

صورة ~~...~~ سلبيا

هي نقطة حرجة (صغيرة وكبيرة)

بنا نوع نقدر ندرس R لأنه ما بنستطيع المنحنى

إذا أخذنا $f(x,y)\, x^3 + y^3$ ~~...~~

/ /

مبرهنة مهمة على R^3 :

لنفرض أن f دالة معرفة على R^3 : $f: D\subseteq R^3 \longrightarrow R$

ولتكن $C\in D$ ، ولنفرض أن المشتقات الجزئية الثانية موجودة ومستمرة ،

① f_{xx}

② $\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$

③ $\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$

ملاحظات :

* ① > 0 ، $0 <$ ② ، $0 <$ ③ $\Leftarrow$ النقطة صغرى نسبية

$0 >$ ① ، $0 <$ ② ، $0 <$ ③ $\Leftarrow$ النقطة عظمى نسبية

تمرين: $f: R^2 \longrightarrow R$. $(x,y) \longmapsto f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2)$

1 أثبت أن النقطة $(0,0)$ هي نقطة حرجة للدالة f

2 برهن أن النقطة $(0,0)$ نقطة صغرى نسبية بالنسبة لمقصور الدالة f على المستقيم المار من النقطة $(0,0)$

3 أثبت أنه في أي جوار $N((0,0),\delta)$ فإن هناك نقاط تكون فيها الدالة $f(x,y) > f(0,0)$ ونقاط $f(x,y) < f(0,0)$

فهي إذاً ليست قصوى .

$\Delta = 0 \Rightarrow$ فشل

/ /

الحل:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = (-2x)(y-2x^2) + (-4x)(y-x^2)$$
$$= -2xy + 4x^3 + 4xy + 4x^3$$
$$= 8x^3 - 6xy.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 0.$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = (\cancel{-x^2})(y-2x^2) + (\cancel{-2x^2})(y-x^2)$$
$$= 2y - 3x^2$$

$\Longrightarrow$ $(0,0)$ نقطة حرجة للدالة f.

② $y = \alpha x$.

$$f(x, \alpha x) = (\alpha x - x^2)(\alpha x - 2x^2)$$
$$= \alpha^2 x^2 - 3\alpha x^3 + 2x^4$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2\alpha^2 x - 9\alpha x^2 + 8x^3$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\alpha^2 - 18\alpha x + 24x^2$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) = 2\alpha^2 \Rightarrow f_{xx}(0,0) > 0.$$

قيمة صغرى نسبياً.

③ نأخذ النقطة من أجل $(0, \frac{\delta}{2}) \in N((0,0),\delta)$

نطبق لـ $\delta > \frac{\delta}{2}$ النقطة $(0, \frac{\delta}{2})$

$$f(0, \tfrac{\delta}{2}) = (\tfrac{\delta}{2} - 0)(\tfrac{\delta}{2} - 0) = \frac{\delta^2}{4} > 0$$

لأن نتحقق من النقطة ... $(\frac{\delta}{\sqrt{3}}, \frac{\delta^2}{2})$ من أجل

$\delta < \sqrt{\frac{8}{3}}$ نختار $\left(\frac{\delta}{\sqrt{3}}, \frac{\delta^2}{2}\right)$ الحل 6

$$f\left(\frac{\delta}{\sqrt{3}}, \frac{\delta^2}{2}\right) = \left(\frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^2}{3}\right)\left(\frac{\delta^2}{2} - \frac{2\delta^2}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{\delta^2}{6}\right)\left(-\frac{\delta^2}{6}\right) = -\frac{\delta^4}{36} < 0 = f(0,0)$$

$\left(\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{2}}, \frac{\delta}{3}\right)$

$\frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{9} < \delta^2$

$\frac{\delta}{2} < \delta^2 - \frac{\delta^2}{9}$

$\frac{\delta}{2} < \frac{8\delta^2}{9} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{8\delta}{9}$ $\quad \frac{9}{16} < \delta$