المحاضرة الثانية عشرة ٢٨/٤/٢٠١٦

$$J=\lim_{t\to 2^{+}}\int_t^4 (x-2)^{-2/3}\,dx=\lim_{t\to 2^{+}} 3\left[(x-2)^{\frac{1}{3}}\right]_t^4$$

$$=3\lim_{t\to 2^{+}}\left[\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{t-2}\right]=3\sqrt[3]{2}$$

$$I_5=3+3\sqrt[3]{2}$$

وهو متقارب

انتهت المحاضرة.

المحاضرة الثالثة عشرة ٢٨/٤/٢٠١٦

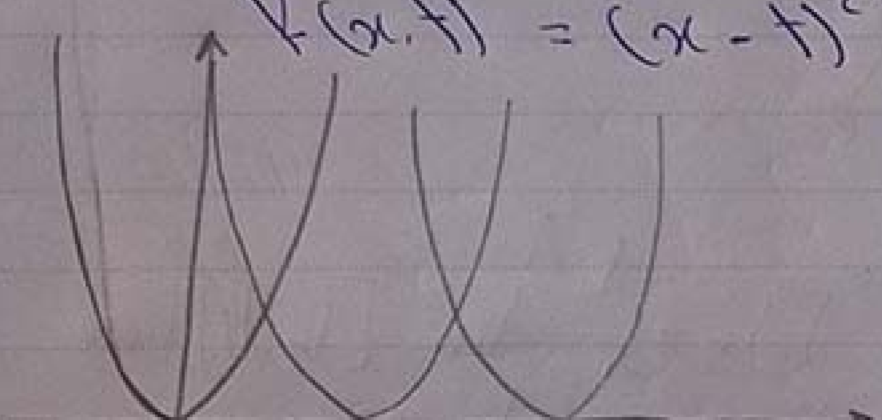
التكامل التابع لوسيط / التكامل العددي:

- تعريف التكامل التابع لوسيط على $[a,b]$
- خواص التكامل التابع لوسيط حيث $a,b\in R$
- تعريف التكامل العددي.
- طريقة الاستطالات : طريقة أشباه المنحرفات.

تعريف: ان $f(x,t)$: تابع لـ x وفق الوسيط t.

مثال:

$$f(x,t)=(x-t)^2\geq 0$$



$x\in[a,b]$, $t\in[t_1,t_2]$; $[a,b]\times[t_1,t_2]=I\times J$

$=\{(x,t): a\leq x\leq b;\ t_1\leq t\leq t_2 : (x,t)\in R\times R\}$

هو ~~كل~~ تكامل له الشكل

$$F(t)=\int_a^b f(x,t)\,dx. \quad : a,b\in R, \text{أ}\ a(t)\ b(t)$$

مثال: أحسب التكامل التالي:

$$F=\int_a^b (x-t)^2\,dx=\left[\frac{1}{3}(x-t)^3\right]_a^b$$

$$F(t)=\frac{1}{3}\left[(b-t)^3-(a-t)^3\right]$$

خواص التكامل التابع لوسيط: $a, b \in \mathbb{R}$

① : اذا كانت الدالة $f(x,t)$ مستمرة على $I \times J$ فإن:
$F(t)$ مستمرة على $J = [T_1, T_2]$

② : قاعدة لايبنتز: اذا كانت $f(x,t)$ دالة مستمرة على $I \times J$ وكانت قابلة للاشتقاق الجزئي $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ بحيث $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ مستمرة على $I \times J$ عندئذ يكون $\frac{dF(t)}{dt}$ أي تابع ل t فقط.

$$\frac{dF(t)}{dt} = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dx$$

مثال ①

$$\frac{dF(t)}{dt} = \varphi(t) \Longrightarrow F(t) = \int \varphi(t)\, dt.$$

مثال ②: أوجد قيمة التفاضل:

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \ln(x^2+t^2) dx \quad : t \neq 0$$

$t \in \mathbb{R}^*, \ x \in [0,1]$

1): $f(x,t) = \ln(x^2+t^2) \quad : x \in [0,1] \ ; \ t \in \mathbb{R}$

$x^2 + t^2 > 0$

2): $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{2t}{x^2+t^2}$

تحقق الشرطان.

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \ln(x^2+t^2)\, dx = \int_0^1 \frac{2t}{x^2+t^2} dx = 2t \int_0^1 \frac{dx}{x^2+t^2}$$

$$= 2t \frac{1}{t} \left[\arctan \frac{x}{t}\right]_0^1 = 2 \arctan \frac{1}{t} - 0$$

حل المثال ①:

$$f(x,t) = (x-t)^2 \Longrightarrow \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = 2(x-t)$$

/ /

مثال (5): احسب التكامل الآتي باستخدام قاعدة لايبنتز:

$$F(t)=\int_0^{\infty}\frac{1-e^{-tx}}{x e^{x}}\ ;\ t>-1\ ;\ F(0)=0$$

$$F(t)=\lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to 0}}\int_a^b \frac{1-e^{-tx}}{x e^{x}}\,dx\ ;\ x\in[a,b],\ x\in]0,\infty[$$

$$\frac{dF(t)}{dt}=\lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to 0}}\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x e^{x}}-\frac{1}{x e^{x}}e^{-tx}\right)dx$$

$$\frac{dF(t)}{dt}=\lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to 0}}\int_a^b \frac{e^{-tx}}{e^{x}}\,dx.$$

ملاحظة: بالاشتقاق بالنسبة لـ t:

انه الاشتقاق للمقدار $\frac{1}{x.e^x}$ هو ثابت بالنسبة لـ t لأنه لا يحوي على (t)

فإن مشتقه هو 0، ومشتق المقدار $-\frac{1}{xe^x}e^{-tx}=-\frac{-xe^{-tx}}{xe^x}$.

$$\Longrightarrow \frac{dF(t)}{dt}=\lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to 0}}\int_a^b \frac{e^{-tx}}{e^{x}}\,dx=\lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to 0}}\int_a^b e^{-x(t+1)}\,dx$$

ملاحظة: $e^{-x}\cdot e^{-tx}=e^{-x(t+1)}$

$$=-\frac{1}{t+1}\lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to 0}}\left[e^{-(t+1)x}\right]_a^b=-\frac{1}{t+1}\lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to 0}}\left[e^{-(t+1)b}-e^{-(t+1)a}\right]$$

$$=-\frac{1}{t+1}(-1)=\frac{1}{t+1}\Longrightarrow\frac{dF(t)}{dt}=\frac{1}{t+1}$$

$$dF(t)=\frac{dt}{t+1}\Longrightarrow F(t)=\int\frac{dt}{t+1}=\ln|t+1|+c$$

$0 = F(0) = \ln|0+1| + c \Rightarrow 0 = c \Rightarrow F(t) = \ln|t+1|$

التكامل العددي: أي حساب قيمة التكامل بشكل تقريبي.

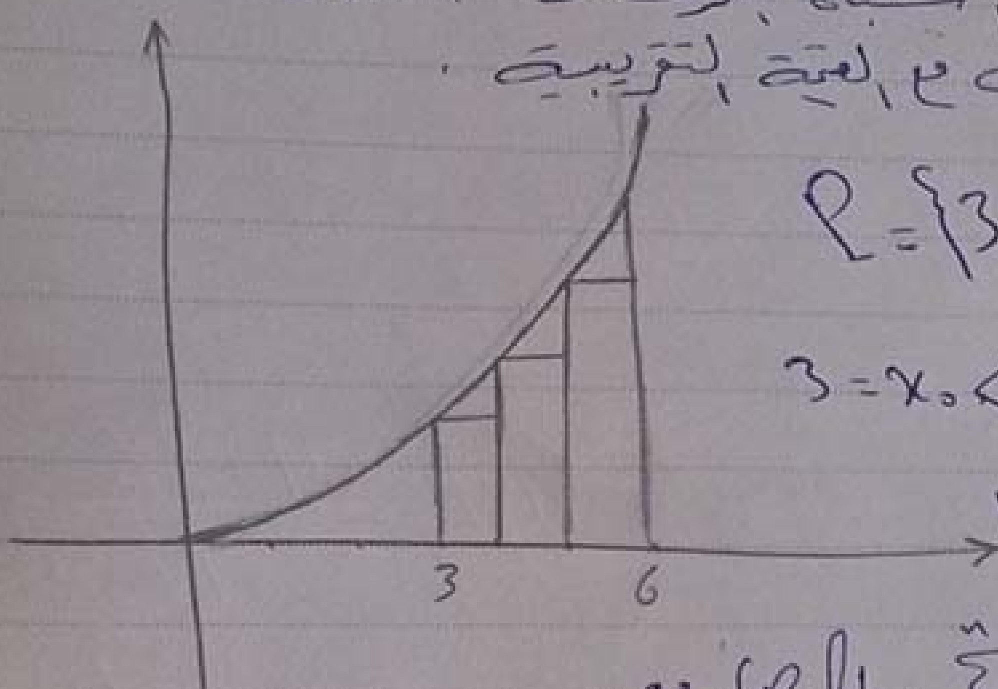
مثال ①: احسب قيمة التكامل

$\int_3^6 x^2\,dx$: $f(x) = x^2$, $[a,b] = [3,6]$

مستخدماً ① طريقة المستطيلات حيث $\Delta x = 1$

② طريقة أشباه المنحرفات $\Delta x = 1$

قارن قيمة التكامل الحقيقي مع القيمة التقريبية.



$P = \{3, 4, 5, 6\}$

$3 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = 6$

$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x$

$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$

$L(P,f) = f(x_0)\Delta x_1 + f(x_1)\Delta x_2 + f(x_2)\Delta x_3$

$= f(3)(1) + f(4)(1) + f(5)(1) = 9 + 16 + 25 = 50$

$U(P,f) = f(4)(1) + f(5)(1) + f(6)(1) = 16 + 25 + 36 = 77$

$S = \frac{50 + 77}{2} = 63.5$

أما قيمة التكامل الحقيقية

$I = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_3^6 = \frac{1}{3}\left[6.6.6 - 3.9\right] = 2(36) - 9 = 63$

طريقة أشباه المنحرفات

$D = \frac{f(3) + f(4)}{2}(1) + \frac{f(4) + f(5)}{2}(1) + \frac{f(5) + f(6)}{2}(1)$

$D = \frac{1}{2}\left[f(3) + 2f(4) + 2f(5) + f(6)\right] = \frac{1}{2}\left[9 + 2(16) + 2(25) + 36\right]$

$= \frac{127}{2} = 63,5$

/ /

القانون العام لأشباه المنحرفات.

$$D = \frac{1}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]\Delta x$$