7/4/2014

المحاضرة السابعة

$\forall X \in ob(\mathcal{C}) \quad F: \mathcal{C} \longrightarrow Sets$

$\alpha: Hom(h_X, F) \longrightarrow F(X)$ تطبيقا [illegible]

$\alpha(f) = f(X)(I_X) \qquad f: h_X \longrightarrow F$

$\beta: F(X) \longrightarrow Hom(h_X, F)$

$\beta(\xi)(Y)(u) = F(u)(\xi)$

$\forall \xi \in F(X), \ \forall Y \in ob(\mathcal{C}), \ \forall u: X \longrightarrow Y$

لنبرهن أولاً أن $\beta(\xi): h_X \longrightarrow F$ هو مورفيزم دالي..

$\alpha \cdot \beta = I_{F(X)}$

$\beta \cdot \alpha = I_{Hom}$

$\forall \xi \in F(X)$

$\beta(\xi): h_X \longrightarrow F$

$\forall Y: \beta(\xi)(Y). \mathcal{C}(X,Y) \longrightarrow F(Y)$

ولنفرض لدينا $\nu: Y \longrightarrow Y' \in \mathcal{C}(Y, Y')$

ولنبرهن على أن المخطط الآتي تبديلي

$$\begin{tikzcd}
h_X(Y) \arrow[r, "\beta(\xi)(Y)"] \arrow[d, "h_X(\nu)"'] & F(Y) \arrow[d, "F(\nu)"] \\
h_X(Y') \arrow[r, "\beta(\xi)(Y')"] & F(Y')
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(X, Y) \arrow[r, "\beta(\xi)(Y)"] \arrow[d, "h_X(\nu)"'] & F(Y) \arrow[d, "F(\nu)"] \\
\mathcal{C}(X, Y') \arrow[r, "\beta(\xi)(Y')"] & F(Y')
\end{tikzcd}$$

إذاً المطلوب هو إثبات:

$$F(\nu). \beta(\xi)(Y) = \beta(\xi)(Y'). h_X(\nu)$$

$\forall \mu: X \longrightarrow Y \in \mathcal{C}(X, Y)$

$$I_1 = \big(F(\nu). \beta(\xi)(Y)\big)(\mu) = F(\nu)\big(\beta(\xi)(Y)(\mu)\big)$$
$$= F(\nu)\big(F(\mu)(\xi)\big)$$
$$= F(\nu . \mu)(\xi)$$ لأن F دالي مباشر

$$I_2 = \big(\beta(\xi)(Y'). h_X(\nu)\big)(\mu) = \beta(\xi)(Y')\big(h_X(\nu)(\mu)\big)$$
$$= \beta(\xi)(Y')(\nu . \mu)$$
$$= F(\nu . \mu)(\xi) = I_1$$

ومنه $I_1 = I_2$ وهذا الشيء صحيح لأجل كل μ حيث $\mu \in \mathcal{L}(X,Y)$

اذاً: $F(\nu) \cdot \beta(\xi)(Y) = \beta(\xi)(Y') \cdot h_X(\nu)$

اذاً $\beta(\xi)$ مورفيزم دالي.

* لنبرهن الآن على أن

$$\alpha \cdot \beta = I_{F(X)}$$
$$\beta \cdot \alpha = I_{Hom(h_X, F)}$$

ليكن $f \in Hom(h_X, F)$

$$(\beta \cdot \alpha)(f) = \beta(\underline{\alpha(f)})$$
$$\xi \in F(X)$$

$\forall\, Y \in ob(\mathcal{L})$ ، $\beta(\alpha(f))(Y)$ من تعريف β

$$\forall\, u \quad \beta(\alpha(f))(Y)(u) = \underbrace{F(u)(\alpha(f))} = F(u)\big(f(X)(I_X)\big)$$

وبما أن $f : h_X \longrightarrow F$ مورفيزم دالي

فإن المخطط الآتي تبديلي

$$\begin{tikzcd}
h_X(X) \arrow[r, "f(X)"] \arrow[d, "h_X(u)"'] & F(X) \arrow[d, "F(u)"] \\
h(Y) \arrow[r, "f(Y)"] & F(Y)
\end{tikzcd}$$

$$F(u) \cdot f(X) = f(Y) \cdot h_X(u)$$

$$\begin{aligned}
\beta(\alpha(f))(Y)(u) &= \big(F(u) \cdot f(X)\big)(I_X) \\
&= \big(f(Y) \cdot h_X(u)\big)(I_X) && \text{«حسب المخطط»} \\
&= f(Y)\big(h_X(u)(I_X)\big) \\
&= f(Y)(u \cdot I_X) && \text{«من تعريف سابق لـ } h_X\text{»} \\
&= f(Y)(u)
\end{aligned}$$

وذلك صحيح لأجل كل u و كل Y ، نستنتج:

$$\beta \cdot \alpha(f) = f \Rightarrow \beta \cdot \alpha = I_{Hom(h_X, F)}$$

ليكن $\xi \in F(X)$ عندئذ:

$$(\alpha \cdot \beta)(\xi) = \alpha(\beta(\xi))$$

$\beta(\xi) : h_X \longrightarrow F$ «منطلق α $Hom(h_X, F)$»

$$= \beta(\xi)(X)(I_X)$$ من تعريف α

$$= F(I_x)(y) = I_{F(x)}(y) = y$$

$$\Rightarrow \alpha . \beta(y) = y \Rightarrow \alpha . \beta = I_{F(x)}$$

الجداءات

تعريف «الجداء»:

لتكن $\mathcal{L}$ فئة ، I مجموعة من الادلة ، ولتكن

$(A_i)_{i \in I} \in ob(\mathcal{L})$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{L}$.

نسمي الثنائية (A , u_i) حيث $A \in ob(\mathcal{L})$ و

$u_i : (A \longrightarrow A_i)_{i \in I} \in Mor(A, A_i)$

جداء للأسرة $(A_i)_{i \in I}$ إذا تحقق : $\forall i \in I$

لأجل أي أسرة من المورفيزمات $(v_i : B \rightarrow A_i)_{i \in I}$

حيث $B \in ob(\mathcal{L})$

يوجد مورفيزم وحيد $u : B \rightarrow A$ يجعل المخطط التالي تبديلي

متغيرة ← ثابتة

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v_i"'] & & A \arrow[dl, "u_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd}$$

متغيرة ← ثابتة

أي يحقق : $\forall i \in I$

$u_i . u = v_i$

ملاحظة:

لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{L}$ ولنعتبر $X \in ob(\mathcal{L})$

لنرمز بـ $\prod_{i \in I} \mathcal{L}(X, A_i)$ للجداء الديكارتي للمجموعات $\mathcal{L}(X, A_i)$

تمهيدية ليكن $\mathcal{L}$ فئة و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{L}$ ونعتبر $X\in ob(\mathcal{L})$

الشروط الآتية متكافئة:

① الأسرة $(A_i)_{i\in I}$ تملك جداء هو الثنائية (A, u_i)

② لأجل كل $X\in ob(\mathcal{L})$ يوجد تطبيق $\Gamma : \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \prod_{i\in I}\mathcal{L}(X,A_i)$ متباين وغامر

الإثبات: $(2 \Leftarrow 1)$

لنفرض أن الثنائية (A, u_i) هي جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$

نعرف: $\Gamma : \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \prod_{i\in I}\mathcal{L}(X,A_i)$

ليكن: $v\in\mathcal{L}(X;A)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "u_i\cdot v"'] & A \arrow[d, "u_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

عندئذ: $\forall i\in I \,;\, u_i\cdot v : X \longrightarrow A_i$

وبالتالي $(u_i\cdot v)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}\mathcal{L}(X,A_i)$

نضع قاعدة الربط لـ Γ : $\Gamma(v) = (u_i\cdot v)_{i\in I}$

إثبات أن Γ تطبيق

ليكن $v, v' \in \mathcal{L}(X,A)$ حيث $v = v'$

يكون لأجل كل $i \in I$: $u_i\cdot v = u_i\cdot v'$

$(u_i\cdot v)_{i\in I} = (u_i\cdot v')_{i\in I} \Rightarrow \Gamma(v) = \Gamma(v')$

ومنه Γ تطبيق

نعرف علاقة أخرى: $\Gamma' : \prod_{i\in I}\mathcal{L}(X,A_i) \longrightarrow \mathcal{L}(X,A)$

ليكن $(w_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}\mathcal{L}(X,A_i)$

بما أن الأسرة A_i تملك جداء (A, u_i)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "w_i"'] & A \arrow[d, "u_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

فإنه لأجل الأسرة $(w_i)_{i\in I}$ يوجد مورفيزم وحيد w يجعل المخطط تبادلي $w : X \longrightarrow A$

يحقق: $u_i\cdot w = w_i$

نضع $\Gamma^{-1}\left((w_i)_{i\in I}\right) = w$

((لا داعي لإثبات أن Γ^{-1} تطبيق لأن w وحيد))

لنبرهن على أن
$$\begin{bmatrix} \Gamma.\Gamma^{-1} = I_{\prod f(X,A_i)} \\ \Gamma^{-1}.\Gamma = I_{f(X,A)} \end{bmatrix}$$

ليكن $(w_i)_{i\in I} \in \prod f(X, A_i)$

عندئذ: $\Gamma.\Gamma^{-1}(w_i)_{i\in I} : \Gamma(\Gamma^{-1}(w_i)) = \Gamma(w)$

$$= (u_i . w)_{i\in I}$$
$$= (w_i)_{i\in I}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma.\Gamma^{-1} = I_{\prod f(X,A_i)}}$$

ليكن $w \in f(X, A)$

$$\Gamma^{-1}.\Gamma(w) = \Gamma^{-1}\left((u_i . w)_{i\in I}\right)$$

بما أن الأسرة $(A_i)_{i\in I}$ تملك جداء هو (A, u_i) فإنه يوجد مورفيزم وحيد

$$u_i . w_0 = u_i \circ w$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "w"] \arrow[dr, "u_i . w"'] & A \arrow[d, "u_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

ومنه $w = w_0$ (لأنه من تعريف الجداء يوجد مورفيزم وحيد)

$$\Gamma^{-1}\Gamma(w) = \Gamma^{-1}(u_i . w) = w$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma^{-1}\Gamma = I_{f(X,A)}}$$

$1 \Leftarrow 2$ للمحاضرة القادمة..

انتهت المحاضرة