المحاضرة الخامسة 3/4/2014

شروط الطلب:

$a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \dots + a_{1n}x_{1n} \geq A_1$ «مقدار النقل على جميع وسائل النقل على الخط الأول»

$a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + \dots + a_{2n}x_{2n} \geq A_2$

$\vdots$

$a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + \dots + a_{mn}x_{mn} \geq A_m$

«وضعنا أكبر أو يساوي لأن الإصابة يتم إجراؤها على الأعداد الثابتة (الأشخاص الذين تم عبورهم بسيارة النقل بشكل ثابت) فنضع أكبر لاحتمال ركوب المزيد من الركاب (الذين تم عبورهم بعدة مرات (إضافية))»

شروط الأنواع:

«عدد وسائل النقل من كل نوع على كافة الخطوط»

$x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = N_1$

$x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = N_2$

$\vdots$

$x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = N_n$

«وضعنا المساواة لأننا نشير جميع وسائل النقل الموجودة»

شروط عدم السلبية.

$x_{ij} \geq 0 \ ; \ i = \overline{1,m} \ , \ j = \overline{1,n}$

النموذج الرياضي:

أوجد $L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \longrightarrow Min$

ضمن الشروط:

$a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \dots + a_{1n}x_{1n} \geq A_1$

$\vdots$

$a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + \dots + a_{mn}x_{mn} \geq A_m$

$x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = N_1$

$\vdots$

$x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = N_n$

$x_{ij} \geq 0 \ ; \ i = \overline{1,m} \ , \ j = \overline{1,n}$

مثال: لتكن لدينا ثلاث أنواع من الطائرات عددها على التوالي 30، 20، 50 طائرة، نريد توزيعها على 4 خطوط جوية متطلباتها على التوالي:
300, 200, 1000, 500

أما الحمولة الشهرية a_{ij} ، والنفقات c_{ij} لكل نوع وعلى كل خط معطاة بالجدول التالي:

الأنواع / الخطوط	1	2	3	حجم الطلب
1	15 15 x_{11}	30 70 x_{12}	25 40 x_{13}	300
2	10 20 x_{21}	25 15 x_{22}	50 70 x_{23}	200
3	20 25 x_{31}	10 15 x_{32}	30 40 x_{33}	1000
4	50 40 x_{41}	17 45 x_{42}	45 65 x_{43}	500
عدد النوع	50	20	30	

__المطلوب:__ صياغة نموذج رياضي بحيث تكون التكلفة أقل ما يمكن

الحل: نفرض أن $\boxed{x_{ij}}$ هو عدد الطائرات من النوع j والمخصصة على الخط i
وبالتالي يأخذ تابع الهدف الشكل:

$$\left.\begin{aligned}
L = {} & 15x_{11} + 70x_{12} + 40x_{13} && \rightarrow \text{التكلفة على الخط الأول} \\
& + 20x_{21} + 15x_{22} + 70x_{23} && \rightarrow \text{" " " الثاني} \\
& + 25x_{31} + 15x_{32} + 40x_{33} && \rightarrow \text{" " " الثالث} \\
& + 40x_{41} + 45x_{42} + 65x_{43} && \rightarrow \text{" " " الرابع}
\end{aligned}\right\} \text{التكلفة على جميع الخطوط}$$

شروط المسألة:

مقدار ما تنقله الطائرات من كافة الأنواع على الخط الأول: $15x_{11}+30x_{12}+25x_{13} \geq 300$

" " " الثاني: $10x_{21}+25x_{22}+50x_{23} \geq 200$

" " " الثالث: $20x_{31}+10x_{32}+30x_{33} \geq 1000$

" " " الرابع: $50x_{41}+17x_{42}+45x_{43} \geq 500$

عدد الطائرات من النوع الأول على كافة الخطوط: $x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=50$

" " " الثاني: $x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=20$

" " " الثالث: $x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=30$

$$x_{ij} \geq 0 \ ; \ i=\overline{1,4} \ ; \ j=\overline{1,3}$$

$\boxed{\text{يوجد نوعين لنماذج النقل}}$

نموذج نقل المواد بأقل تكلفة

لنفرض أننا نريد نقل إحدى المواد من مراكز الإنتاج أو التخزين إلى مراكز الاستهلاك

ولنفرض أنه لدينا (m) مركزاً للإنتاج أو التخزين

وأن المادة المعروضة موزعة بكميات محددة تساوي $a_1, a_2, ..., a_m$

كما نفرض وجود (n) مركز استهلاكي

وكل منها يحتاج إلى كميات معينة من تلك المادة تساوي $b_1, b_2, ..., b_n$

لنفرض أن تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المركز الإنتاجي i إلى المركز الاستهلاكي j

تساوي c_{ij}

كما نرمز للكمية التي يجب نقلها من المركز الإنتاجي i إلى المركز الاستهلاكي j

بالرمز x_{ij}

عندئذ يكون لدينا الجدول التالي:

مراكز الاستهلاك / مراكز الانتاج	1	2	...	j	...	n	الكميات المعروضة
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1j} x_{1j}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2j} x_{2j}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}	a_i
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
الكميات المطلوبة	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n	

المطلوب: صياغة نموذج رياضي لتحديد حجم عمليات النقل x_{ij} من مراكز الانتاج الى مراكز التوزيع الاستهلاك بحيث تكون تكلفة النقل أقل ما يمكن

وهنا نميز حالتين:

1) حالة النموذج المغلق: (نموذج النقل المتوازن)

هي الحالة التي يكون فيها اجمالي الكميات المعروضة من تلك المادة تساوي لاجمالي الكميات المطلوبة. أي:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

في هذه الحالة يكون لدينا تابع الهدف:

$c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} \longrightarrow$ تكلفة النقل لمركز الاستهلاك الأول

$+ c_{21}x_{21} + \dots + c_{2n}x_{2n} \longrightarrow$ الثاني " " "

$+ \dots + c_{mn}x_{mn} \longrightarrow$ m " "

وبالتالي:

$$L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

الشروط : شروط الكميات الموزعة

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + \dots + x_{1n} = a_1$$
$$\vdots$$
$$x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m$$

شروط الكميات المطلوبة :

$$x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1$$
$$\vdots$$
$$x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n$$

النموذج الرياضي :

أوجد

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \longrightarrow Min$$

ضمن الشروط :

$$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1$$
$$\vdots$$
$$x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m$$

$$x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1$$
$$\vdots$$
$$x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = \overline{1,m} \; ; \; j = \overline{1,n}$$

2 حالة النموذج المفتوح

هي الحالة التي يكون فيها اجمالي الكميات الموزعة لا يساوي اجمالي الكميات المطلوبة.

وهنا نميز حالتين :

A_ فائض في الانتاج

B_ عجز في الانتاج

A فائض في الإنتاج

أ الحالة التي يكون فيها $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

أي الحالة التي يكون فيها إجمالي الكميات المتوفرة أكبر من إجمالي الكميات المطلوبة..

في هذه الحالة نضيف إلى المراكز الاستهلاكية المحددة في المسألة مركز استهلاكي وهمياً b_{n+1} ، ونجعل مقدار استهلاكه يساوي الفرق بين الاجماليين

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

فنضع تكلفة النقل من مراكز الإنتاج جميعها إلى ذلك المركز الوهمي تساوي الصفر

$$c_{i\,n+1} = 0 \quad \text{حيث} \quad i = \overline{1,m}$$

وبذلك يكون قد حولنا هنا النموذج المفتوح إلى نموذج مغلق يتضمن m مركز إنتاجية و $n+1$ مركز استهلاكي

ونكتب النموذج الرياضي على الشكل التالي:

(هنا كتابة مختصرة يجب أن نكتبه بالامتحان بشكل مفصل مع الأرقام)

النموذج الرياضي

أوجد $L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \longrightarrow Min$

ضمن الشروط:

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \quad ; \quad i = \overline{1,m}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad ; \quad j = \overline{1,n+1}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad ; \quad i = \overline{1,m} \; ; \; j = \overline{1,n+1}$$

(B) عجز في الإنتاج ..

الحالة التي تكون فيها اجمالي الكميات الموجودة أقل من اجمالي الكميات المطلوبة

أي $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$

في هذه الحالة نضيف إلى المراكز الانتاجية المحددة بالمسألة مركزاً انتاجياً وهمياً (m+1) ونخصص كجعل مقدار طاقته يساوي الفرق بين الإجماليين

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

كما نضع تكلفة النقل منه إلى جميع المراكز الاستهلاكية = الصفر

أي $C_{m+1,j} = 0 \qquad j=\overline{1,n}$

وبذلك يأخذ النموذج الرياضي الشكل التالي:

النموذج الرياضي:

$$L = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_{ij} \longrightarrow Min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \; ; \quad i = \overline{1, m+1}$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j \; ; \quad j = \overline{1, n}$$

$$x_{ij} \geq 0 \; ; \quad i = \overline{1, m+1} \; ; \quad j = \overline{1, n}$$

مثال: ليكن لدينا 4 مراكز انتاجية و 3 مراكز استهلاكية

والكميات التي نريد نقلها من مراكز الانتاج إلى مراكز الاستهلاك

والتكلفة اللازمة لنقل الوحدة الواحدة من المركز الانتاجي i إلى المركز الاستهلاكي j

معطاة بالجدول التالي..

والمطلوب: (1) تحديد نوع نموذج النقل المعطى

(2) صياغة النموذج الرياضي للمسألة السابقة بحيث تكون تكلفة النقل أقل ما يمكن.

مراكز الاستهلاك / مراكز الانتاج	1		2		3		الكميات المعروضة
1	1	x_{11}	2	x_{12}	6	x_{13}	11
2	3	x_{21}	8	x_{22}	1	x_{32}	9
3	7	x_{31}	10	x_{32}	4	x_{33}	13
4	12	x_{41}	8	x_{42}	5	x_{43}	7
الكميات المطلوبة	18		10		12		40 / 40

الحل: بما أن $\sum_{i=1}^{4} a_i = 11 + 9 + 13 + 7 = 40$

$\sum_{j=1}^{3} b_j = 18 + 10 + 12 = 40$

أي $\sum_{j=1}^{3} b_j = \sum_{i=1}^{4} a_i$ فالنموذج متوازن

النموذج الرياضي: أوجد

$$\begin{aligned} L = &\ x_{11} + 2x_{12} + 6x_{13} \\ &+ 3x_{21} + 8x_{22} + x_{32} \\ &+ 7x_{31} + 10x_{32} + 4x_{33} \\ &+ 12x_{41} + 8x_{42} + 5x_{43} \rightarrow Min \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 11 \\ x_{21} + x_{22} + x_{32} &= 9 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &= 13 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} &= 7 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 18 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 10 \\ x_{13} + x_{32} + x_{33} + x_{43} &= 7 \\ x_{ij} \geq 0 \quad i = \overline{1,4}\ ;\ j &= \overline{1,3} \end{aligned}$$

الامتحان: نموذج غير متوازن:
اكتب النموذج الرياضي له (حدد النموذج
المعروض: فائض انتاج - عجز انتاج)
ونكتب النموذج كما سبق
عدل في معطيات المسألة ليصبح النموذج
متوازن ثم اكتب صيغة النموذج الجديد
في حال عجز الانتاج نكتب: نفرض ان احد
مراكز الانتاج وهمي (...)
المتحولات معدومة ...

انتهت المحاضرة