البرهان [2] $\boxed{أو}$

2) $\lim_{x \to x_0} g(x) = B \iff \forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0$

$0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon_1$

مزيد اثبات:

$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0 , 0 < \|x - x_0\| < \delta$

$\Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| < \varepsilon$

لأن $g(x)$ مشاركة B *

$* \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| = \left| \frac{B - g(x)}{g(x) \cdot B} \right| = \frac{|g(x) - B|}{|g_1(x)||B|} < \frac{\varepsilon_1}{|B||g_1(x)|}$

$|B| = |B - g(x) + g(x)| \le |B - g(x)| + |g(x)| < \varepsilon_1 + |g(x)|$

$|B| < \varepsilon_1 + |g(x)| \Rightarrow |B| - \varepsilon_1 < |g(x)|$

عاأن ε_1 اختياري. عليه ان نختار $0 < \varepsilon_1 = \frac{|B|}{2}$

$\Rightarrow |B| - \frac{|B|}{2} < |g(x)| \Rightarrow \frac{|B|}{2} < |g(x)|$

$\frac{2}{|B|} > \frac{1}{g(x)}$ سالعلاقة * $< \frac{2}{|B|}$

$\Rightarrow \frac{1}{g(x)} < \frac{2}{|B|} \Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| < \frac{\varepsilon_1}{|B||g(x)|} < \frac{2\varepsilon_1}{B^2}$

$\forall \varepsilon = \frac{2\varepsilon_1}{B^2} > 0 , \exists \delta > 0 , 0 < \|x - x_0\| < \delta$

$\Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| < \varepsilon \iff \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$

استمرار الدوال الحقيقية لعدة متغيرات:

"تعريف": لتكن f دالة $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة حقيقية لعدة متغيرات

ولتكن $x_0 \in S$ نقول عن f انه مستمر عند x_0 إذا تحقق الشرط التالي:

* لاحظ < ε، δ الصفر ①

① $\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0 , \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

f مستمر على S ⟸ f مستمر في كل نقطة من نقاط S

جبور ©

$n^2 + n = n(n+1)$

$3 * 3 + 3 = 4(3)$

مبرهنة: $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $x_0 \in S$

$\boxed{1}$ f مستمر في x_0 $\Leftrightarrow$ من أجل كل جوار V لـ $f(x_0)$ المتغير
يوجد جوار U لـ x_0 المتغير بحيث

$\forall x \in U \cap S \Rightarrow f(x) \in V$

$\boxed{2}$ f مستمر عند x_0 $\Leftrightarrow$ لكل متتالية $\{x_m\}$ من عناصر S
والمتقاربة من x_0 المتغير نجد متتالية $\{f(x_m)\}$
متقاربة من $f(x_0)$.

"بدون برهان"

مبرهنة لتكن $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in S \cap S'$ (x_0 نقطة حدية)

f مستمر في x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

البرهان:

" $\Rightarrow$ " f مستمر في x_0 $\Leftarrow$ المعطيات

$$\left.\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|x - x_0\| < \delta \\ &\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \end{aligned}\right\} *$$

وبما أن x_0 نقطة حدية $\Leftarrow$ $0 < \|x - x_0\| < \delta$ شرط النهاية.

$x \neq x_0$ المعرفة

$\Leftarrow$ الشرط $(*)$ محقق.

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

" $\Leftarrow$ " نفرض أن: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

يجب برهان أن:

$$\left.\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \cancel{0<} \|x - x_0\| < \delta \\ &|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

p) $x = x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\Rightarrow$ f مستمر في x_0.

B) $x \neq x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0$

$$\|x - x_0\| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ f مستمرة في x_0

ملاحظة

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} (x)\right) = f(x_0)$$

إذا كانت f مستمرة و x_0 نقطة حدية

إن هذه المساواة تدل على أنه يمكن التبديل بين النهاية و f.

---

(2) **مبرهنة:** لتكن f دالة بحيث $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in S \setminus S'$ (ليست حدية)

عندئذ f مستمرة في النقطة x_0

البرهان: نفرض جدلاً أن f غير مستمرة في x_0

$$\exists \varepsilon > 0 , \forall \delta > 0 , \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

هذا يعني أنه [illegible] الكرة المفتوحة $N(x_0 , \delta)$ الذي مركزها x_0 ونصف قطرها δ بأنه يوجد عنصر $x \in S$ بحيث يختلف عن x_0.

$x \in N(x_0 , \delta)$ $\Longrightarrow$ x_0 نقطة حدية وهذا يناقض مع الفرض أن x_0 ليست نقطة حدية

ـه f مستمرة في x_0.

مبرهنة

$$\left.\begin{array}{ll} f : S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} & f \text{ مستمرة في } x_0 \\ g : T \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} & g \text{ مستمرة في } x_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

سؤال هل [illegible] ليست نقطة حدية

$N(x_0 , \delta) \cap S - \{x_0\} =$

$f + g : S \cap T \longrightarrow \mathbb{R}$ مستمرة في x_0

$f \cdot g : S \cap T \longrightarrow \mathbb{R}$ مستمرة في x_0

$\dfrac{f}{g} : S \cap T \setminus \{x \in T , g(x) = 0\}$ مستمرة في x_0.

$f+g : S \cap T \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ لنبرهن الحالة الأولى فقط

نميز حالتين:

1) $x_0 \notin (S \cap T)'$ $\Longrightarrow$ ~~......~~ $f+g$ مستمرة في x_0 ليش طلع

يعني حسب مبرهنة سابقة ؟؟؟؟؟ نعم (2)

2) $x_0 \in (S\cap T)' \cap (S \cap T)$ $\Longrightarrow$ (1) f مستمرة في x_0

لأن:

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) =$$

الباقي في البرهان

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0)$$

تركيب الدوال المستمرة هو دالة مستمرة: نتيجة

حول نقطة

$$S \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{f \text{ مستمر}} f(S) = T \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{g \text{ ومستمر}} \mathbb{R}$$

مستمر الأول مطلوب الثاني $\quad$ مستمر $h = g \circ f : S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

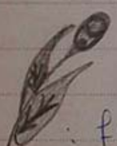
"ندعو h بالدالة المركبة للدالتين f و g

مبرهنة القيمة الوسطى

لما أن f مستمرة و g مستمرة فإنها h مستمرة"

(1) $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ مستمرة على S

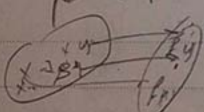
(2) مترابطة S



ولتكن $x, y \in S$ ، $\alpha \in \mathbb{R}$

إذا كان: $f(x) < \alpha < f(y)$

فإنه يوجد $\beta \in S$ بحيث $f(\beta) = \alpha$



بدون برهان.

تعريف: لتكن لدينا $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

لتكن $f(S)$ مجموعة قيمها. ?

(1) نقول أن f محدودة من الأعلى إذا وفقط إذا كانت مجموعة قيمها محدودة من الأعلى

(2) f محدودة من الأدنى إذا وفقط إذا كانت مجموعة قيمها محدودة من الأدنى

(3) f تملك $\underline{\sup}$ $\Longleftrightarrow$ $\sup_{x \in S} f(x)$ موجود

$\boxed{4}$ f أعظمي ⟸ مجموعة متراصة (s) $f(s)$ أعظمية

f أصغرية ⟸ مجموعة متراصة (s) $f(s)$ أصغرية

f تملك $\inf f$ ⟸ $\inf\limits_{x\in S}\{f(s)\}$ موجود

f مستمرة على s : محدودة ومغلقة

مبرهنة: $f: S\subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$; s متراصة عندئذٍ :

f مستمرة على متراصة

$\boxed{1}$ f محدودة

$\forall x\in S,\ \exists K>0 ;\ |f(x)|<K$

$\boxed{2}$ تدرك f حديها الأعظمي والأصغري.

بدون برهان

آخر فقرة من الفصل

تعريف الاستمرار المنتظم:

نقول عن $f: S\subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ مستمرة بانتظام

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta(\varepsilon)>0,\ \forall x_1, x_2\in S$

$\|x_1-x_2\|<\delta \Longrightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

نتائج:

$\boxed{1}$ تركيب دوال مستمرة بانتظام هو دالة مستمرة بانتظام

$\boxed{2}$ الاستمرار على متراصة ⟸ استمرار بانتظام

$\boxed{3}$ f مستمر بانتظام ⟸ f مستمر.

$\boxed{4}$ f غير مستمر ⟸ f غير مستمر بانتظام.

مثال:

$f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow x^2$

أثبت أن f مستمرة بانتظام على المجال $[0,1]$

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta(\varepsilon)>0,\ \forall x_1, x_2\in[0,1]$

$\|x-x_0\|<\delta \Longrightarrow |x_1^2-x_2^2|<\varepsilon$

$|x_1^2-x_2^2| = |(x_1-x_2)(x_1+x_2)| = |x_1-x_2|\,|x_1+x_2| < \delta|x_1+x_2|$

مهم للفحص

سؤال

إذا كانت مستمرة من البداية (2)

$$x_1, x_2 \in [0,1] \Rightarrow \left.\begin{matrix} 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 \leq x_2 \leq 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 \leq x_1 + x_2 \leq 2$$

$$\Rightarrow |x_1^2 - x_2^2| < 2\delta \quad \varepsilon$$

(التعريف في طبيعة المطلقة) ونحن نختار بحيث $\varepsilon = 2\delta$

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0, \ \forall x_1, x_2 \in [0,1], \ \|x_1 - x_2\| < \delta$$

$$\Rightarrow |x_1^2 - x_2^2| < \varepsilon$$

← f مستمرة بانتظام ← f مستمرة على المجال $[0,1]$

مغلق ومحدود

تمرين:

$$f : [-1,1] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2 + x + 1$$

ادرس استمرار الدالة f المعرفة بهذا الشكل.

$\forall x \in [-1,1], \ \exists M = 2 > 0, \ |f(x)| < 2 \Rightarrow [-1,1]$ مجموعة محدودة ومغلقة $\Rightarrow [-1,1]$ فهو متراص

x مستمرة ومجموع دوال مستمرة هو مستمر

f مستمرة على $[-1,1]$ متراص ← f مستمرة بانتظام حسب النظرية

$[-1,1]$ لأنه مغلق ومحدود فهو متراص

ما فيه داعي نرجع المثلث ... بالطريقة العادية.

وظيفة:

[1]

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{(x^2 - (y-2)^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - 1}{x^2 + (y-2)^2} & (x,y) \neq (0,2) \end{cases}$$

أثبت أن

$$\lim_{(x,y) \to (0,2)} f(x,y) = \frac{1}{2}$$

---

[2]

$$f, g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad s.\ x \ \frac{1}{x \cdot y}$$

$$g(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

أثبت أن $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} g(x,y) = 0$$