م 15

الثلاثاء / ٤ / ٢٠١٤م

لتكن f دالة معرّفة على مجموعة جزئية $D \subseteq R^n$، ولتكن c نقطة داخلية من D ($c \in D^\circ$) ولنفرض أن المشتقات الجزئية الأولى $\frac{\partial f}{\partial x}$ موجودة في جوار النقطة c ومستمرة في النقطة c، عندئذٍ:
تكون f قابلة للاشتقاق في النقطة c.

نتيجة (١):
إذا كانت كل المشتقات الجزئية الأولى لـ f موجودة ومستمرة في c، فإن f مستمرة في النقطة (c).

نتيجة (٢): إن وجود المشتقات الجزئية الأولى واستمرارها على كامل الساحة D تقتضي قابلية الاشتقاق للدالة f في أي نقطة من الساحة D.

خواص قابلية الاشتقاق:

$$f, g : D \subseteq R^n \longrightarrow \mathbb{R}$$ ولتكن $c \in D^\circ$ نقطة داخلية
و f و g قابلتين للاشتقاق.

1 الخاصة الخطية:

$\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ ;\ \alpha f + \beta g$ تكون قابلة للاشتقاق

وبالتالي:

$$d_c(\alpha f + \beta g) = \alpha\, d_c f + \beta\, d_c g.$$

2 خاصة الجداء:

$f.g$ قابلة للاشتقاق. كما أن $d_c(f.g) = f d_c g + g\, d_c f$

★ قابلية الاشتقاق للدوال المركبة:

لتكن u , v دالتين حقيقيتين معرفتين على الساحة D من R^2:

دالة حقيقية

$$u: D \subseteq R^2 \longrightarrow R$$
$$(x,y) \longmapsto u(x,y) = u$$

دالة حقيقية

$$v: D \subseteq R^2 \longrightarrow R$$
$$(x,y) \longmapsto v(x,y) = v$$

ولنعرف الدالة المتجهة التالية كما يلي:

دالة متجهة

$$F: D \subseteq R^2 \longrightarrow R^2$$
$$(x,y) \longmapsto F(x,y) = (U, v)$$
$$(U(x,y), v(x,y))$$

أي: أن الدالة المتجهة هي عبارة عن زوج مرتب من الدوال الحقيقية $F = (u, v)$ أي

$\boxed{F(D) = D'}$ ؛ ولنفرض أن المجموعة D' هي صورة المجموعة D وفق F ؛

ولننتقل من D' إلى R وفق f كما يلي،

$$\underset{\subseteq R^2}{D} \xrightarrow{F} \underset{\subseteq R^2}{D'} \xrightarrow{f} R$$

لمادي كيف 2، تعطي دالة g

$$g = f \circ F \quad : g: D \longrightarrow R.$$

والمطلوب: دراسة قابلية الاشتقاق أو المفاضلة للدالة g.

★ تعريف: نقول عن الدالة المتجهة F المعرفة على D من R^2 أنها قابلة للاشتقاق في نقطة داخلية c، إذا كانت الدالتين u, v قابلتين للاشتقاق في النقطة c.

/ /

مبرهنة: (بدون برهان) (مطلوب الحفظ والتطبيق) هامة

لتكن الدالة المتجهة F بحيث هي $F(u, v)$ تابعة لـ u, v

ومعرفة على D من $\mathbb{R}^2$ ومستقرها R^2 (تأخذ قيمها في R^2)

ولنفرض أن $c(a, b)$ هي نقطة داخلية في D، وأن F قابلة

للاشتقاق في النقطة c.

أي أن ((u, v) قابلتان للاشتقاق في c)

ولنفرض أن الدالة الحقيقية f معرفة على D' بحيث $F(D) = D'$

ومحتواة في R^2.

وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$، وقابلة للاشتقاق في النقطة

$(U(a,b), v(a,b))$.

$(\alpha \; , \; \beta)$ "المسماة سابقا"

عندئذ:

$$D \xrightarrow{\;F\;} D' \xrightarrow{\;f\;} R$$

$$(a,b) \longmapsto (\underbrace{U(a,b)}_{\alpha}, \underbrace{v(a,b)}_{\beta}) \longrightarrow R$$

من R^2

أي عنصر من R أو $f(\alpha, \beta) \in R$

عدد ومركبة واحدة

عندئذ: $g = f \circ F : D \longrightarrow R$

تكون قابلة للاشتقاق في النقطة c

ويتحقق لدينا ما يلي:

المشتق الجزئي

$$g_x(a,b) = f_u(\alpha, \beta) \cdot U_x(a,b) + f_v(\alpha, \beta)\, v_x(a,b)$$

المشتق الجزئي لـ F بالنسبة لـ u

$$g_y(a,b) = f_u(\alpha, \beta) \cdot U_y(a,b) + f_v(\alpha, \beta) \cdot v_y(a,b)$$

/ /

مثال: لتكن f دالة حقيقية ساحتها $R^2\setminus\{oy\}$

$$f(x,y)=\operatorname{ArcTg}\frac{y}{x}$$

ولتكن $(x,y): R \longrightarrow R$

$\{t, x, y\}$ دالتيا حقيقيتين

معرفتين بالشكل التالي:

$$x(t)=\cos t \quad , \quad y(t)=\sin t$$

احسب بطريقتين مختلفتين $\dfrac{\partial}{dt} f(x(t), y(t))$.

$\boxed{1ط}$
$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{ArcTg}\underbrace{\frac{\sin t}{\cos t}}^{tg\,t}$$

مشتقة $(\operatorname{Arctg} u)' = \dfrac{(u)'}{1+u^2}$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(t) = 1$$

$\boxed{2ط}$
$$\frac{\partial}{\partial t} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= \frac{-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\sin t + \frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cos t$$

$$= \frac{\frac{y}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}\sin t + \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}\cos t$$

هنا عوضنا ثم عدالي

$$= \frac{y\sin t + x\cos t}{x^2+y^2} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{-\partial}{\partial x}\left(\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\right)\cdot\sin t$$

$$= \frac{-\left(\frac{y}{x}\right)'}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$=$

تمرين ؛

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = \|x\|^{2-n} \quad ; \quad n \geq 3$$

أثبت أن مجموع المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = 0 .$$

"الحل"

$$f(x) = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}\right)^{2-n}$$
$$= (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{2-n}{2}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{2-n}{2}(2x_1)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{2-n}{2} - \frac{2}{2}}$$
$$= 2-n\,(x_1)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{n}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = (2-n)\left[(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{n}{2}} - 2\frac{n}{2}X_1^2(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{n}{2}-1}\right]$$
$$= (2-n)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{n}{2}}\left[1 - n x_1^2 (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-1}\right]$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = (2-n)(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{n}{2}}\left[1 - n x_2^2 (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-1}\right]$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} = (2-n)(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{n}{2}}\left[1 - n x_n^2 (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-1}\right]$$

عامل مشترك

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = (2-n)(x_1^2 + \dots + x_n^2)\left[n - n(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-1}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)\right]$$

n مرة واحد

[illegible]

/ /

تمرين : (1) :

$f : R^2 \longrightarrow R$

$f(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$

$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial F}{\partial x}(0,1)$, $\frac{\partial F}{\partial e}(0,0)$, $\frac{\partial F}{\partial e}(0,1)$

: $e\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

حدّد من بين المشتقات ما كان موجود منها

واحسب قيمته العددية في حال الوجود.

تمرين (2) :

$f : R^2 \longrightarrow R$

$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ x^2 + y^2 \frac{1}{x^2+y_1} & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$

برهن أن f قابلة للاشتقاق في أي نقطة من R^2.

وأثبت أن f_x و f_y غير مستمرة في (0,0)

~~$* \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}} y^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}}$~~

~~$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 0$~~ ~~$\frac{\partial F}{\partial e}(0,0) = ?$~~

~~$* \frac{\partial F}{\partial x}(0,1) = 0.$~~

محذوف