المحاضرة السادسة عشر — الخميس 15/5/2014

الموضوع: تكامل لوبيغ

1- التابع القيوس.

2- التابع المميز (الدرجي)

3- التابع البسيط

4- تكامل لوبيغ للتابع البسيط

1- التابع القيوس: $(X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$

$f: X \longrightarrow Y$

نقول عن f إنه قيوس إذا كانت الصورة العكسية للمجموعة القيوسة في المستقر هي مجموعة قيوسة في المنطلق أي:

$\forall B \in \mathcal{B} \rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

أو: $\forall B \subseteq Y \rightarrow f^{-1}(B \subseteq X$

2- التابع المميز (الدرجي):

لتكن لدينا $X \neq \phi$ ، $A \subseteq X$ عندئذٍ نعرف التابع χ كما يلي:

$\chi : X \longrightarrow \{0, 1\}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & ; \ x \notin A \\ 1 & ; \ x \in A \end{cases}$$

نعلم أنّ: جبر تام $\mathcal{A} = \{\phi, X, A, A^c\}$

نلاحظ أنّ:

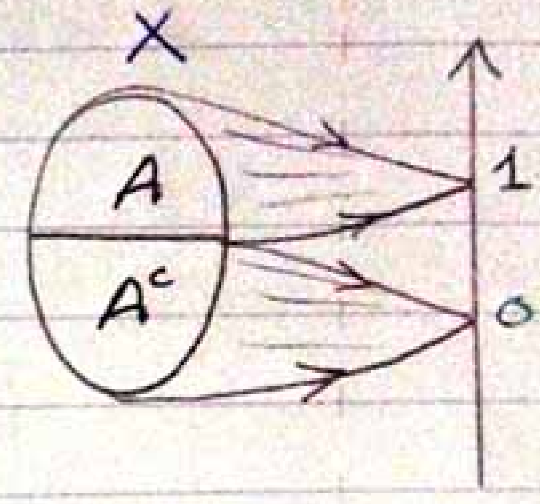
1) $\chi_X(x) = 1$

2) $\chi_\phi(x) = 0$

3) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$

$$\begin{cases} x \in A \cap B : 1 = 1.1 \\ x \notin A \cap B : \begin{cases} 0 = 0.0 \\ 0 = 1.0 \\ 0 = 0.1 \end{cases} \end{cases}$$

4) $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x)$
$A\cap B = \phi$



5) $\chi_{A\setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_{A\cap B}(x)$

6) $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x)$

7) $A \subseteq B \rightarrow \chi_A(x) \leq \chi_B(x)$

8) $\chi_{A\Delta B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\,\chi_{A\cap B}(x)$

3- التابع البسيط:

ليكن التابع: $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ نقول عن f إنه بسيط إذا كانت مجموعة قيمه منتهية.

$$f : X \longrightarrow \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$$

نتيجة: التابع المميز (المؤشر) هو تابع بسيط.

$\forall x \in X$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \, \chi_{A_k}(x) \quad ; \quad \bigcup_{k=1}^{n} A_k = X \; , \; \bigcap_{k=1}^{n} A_k = \phi$$

أي أن التابع البسيط يكتب كتركيب خطي:

$$f(x) = c_1 \chi_{A_1}(x) + c_2 \chi_{A_2}(x) + \dots + c_n \chi_{A_n}(x)$$

عندما $x \in A_1 \leftarrow f(x) = c_1$ لدينا :

$$f(x) = c_1(1) + c_2(0) + \dots + c_n(0)$$

مثال : $X = [0, 7]$ عندئذٍ

$$f(x) = 2\chi_{[0,3[}(x) + 3\chi_{[3,6[}(x) + 7\chi_{[6,7]}(x)$$

$$f(6) = 2(0) + 3(0) + 7(1) = 7$$

4- تكامل لوبيغ للتابع البسيط $(X, \mathcal{A}, \mu)$

نعرّف تكامل لوبيغ للتابع البسيط f على الفضاء X بالنسبة للقياس μ بالشكل التالي :

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mu(A_i)$$

حيث $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$ ، $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \phi$ (أي أن A_i تمثل تجزئة لـ X)

$\{c_i\}_{i=1,\dots,n}$ مجموعة قيم التابع f (البسيط).

$$A_i = \{x \in A_i : f(x) = c_i\} = f^{-1}(\{c_i\})$$

مثال : لنحسب التكامل : $\int_{[0,3]} [x] \, d\mu$.

الحل :

$$[x] = \begin{cases} 0 & : \quad 0 \leq x < 1 \quad : A_1 = [0, 1[\\ 1 & : \quad 1 \leq x < 2 \quad : A_2 = [1, 2[\\ 2 & : \quad 2 \leq x < 3 \quad : A_3 = [2, 3[\\ 3 & : \quad x = 3 \quad : A_4 = [3, 3] \end{cases}$$

$$\int_{[0,3]} [x] \, d\mu = 0 \cdot \mu(A_1) + 1 \cdot \mu(A_2) + 2\mu(A_3) + 3\mu(A_4)$$

$= 0 \cdot (1) + 1 \cdot (1) + 2 \cdot (1) + 3 \cdot (0) = 3$

أيضاً: $\int_0^3 [x]\, dx = \int_0^1 \underbrace{0 \cdot dx}_{=0} + \int_1^2 1\, dx + \int_2^3 2\, dx + \int_3^3 3\, dx$

ملاحظات:

$\lim_{b \to 2} \int_1^2 1\, dx = \lim_{b \to 2} [x]_1^b$

$= \lim_{b \to 2} [b - 1] = 1$

$\lim_{b \to 3} \int_2^3 2\, dx = 2 \lim_{b \to 3} [x]_2^b = 2 \lim_{b \to 3} [b - 2] = 2$

$\Rightarrow \int_0^3 [x]\, dx = 0 + 1 + 2 + 0 = 3$

مثال: أوجد قيمة التكامل المعطى بالشكل:

$$\int_{[-3,3]} \text{sing}(\cos \pi x)\, d\mu \; ; \; \text{sing}(w) = \begin{cases} 1 , & w > 0 \\ 0 , & w = 0 \\ -1 ; & w < 0 \end{cases}$$

$$\int_{[-3,3]} \text{sing}(\cos \pi x)\, d\mu = 1\, \mu(A_1) + 0\, \mu(A_2) - 1\, \mu(A_3)$$

$\cos \pi x = 0 \rightarrow \pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x = \frac{1}{2} + k$

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$, $k = 1 \Rightarrow x =$

$k = 2 \rightarrow x = \frac{5}{2}$, $k = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$

$k = -2 \rightarrow x = \frac{-3}{2}$, $k = -3 \Rightarrow x = \frac{-5}{2}$

القيم التي تجعل $\cos \pi x = 0$ هي:

$A_2 = \{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-5}{2} \}$

لأنّ $sing(\cos \pi x) = 0$

$\mu(A_2) = 0$

$A_1 =]\frac{-5}{2}, \frac{-3}{2}[\cup]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[\cup]\frac{3}{2}, \frac{5}{2}[$

$\mu(A_1) = 1 + 1 + 1 = 3$

$\frac{-3}{2} - (\frac{-5}{2}) = 1$

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = [-3, 3]$

$A_3 = [-3, \frac{-5}{2}[\cup]\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[\cup]\frac{5}{2}, 3]$

$\mu(A_3) = \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2} = 3$

$\rightarrow \int_{[-3,3]} sing(\cos \pi x)\, d\mu = 1(3) + 0(0) - 1(3) = 0$

انتهت المحاضرة السادسة عشر والأخيرة

Dania Albarsha

ملاحظات عامة حول امتحان التحليل (5):

يوجد سؤال أبحث نظرية (بين 20 ← 40 marks)
ولكن على الأغلب 20 marks.

النظرية إما شرط لازم وكافي أو نظريتين من الفصل الأول

تكامل استيلجس
← درجية } يأتي منها تمارين (2)
← تابعين } ذو فروع (1) + مستمر $\boxed{2}$

القياس: التعاريف من الناحية التطبيقية (الفرق بين الطبولوجيا والحلقة والجبر)

تمارين: قياس الاجتماع، قياس الفرق مثل تمرين [1,2,3,4] أصغر جبر وأصغر حلقة....

والمحاضرة الأخيرة هامة (درجي بسيط لوبيغ)

الساعات المكتبية: الأحد والاثنين والخميس (٩ ← ٢)

بالتوفيق والنجاح بإذن الله للجميع

لا تنسوا الأخذ بالأسباب