المحاضرة العاشرة فئات 27/4/2014

أمثلة

1- الفئة وحيدة الشيء: تتألف من شيء واحد وليكن X، ومورفيزم واحد هو

$$I_x : X \longrightarrow X$$

2- الفئة ثنائية الشيء: وتتألف من الشيئين X , Y
والمورفيزمات الآتية: $I_X \ , \ I_Y \ , \ v : X \longrightarrow Y$

3- الفئة ثلاثية الشيء: وتتألف من الأشياء X , Y , Z
والمورفيزمات الآتية: $I_X \ , \ I_Y \ , \ I_Z$

$v : X \longrightarrow Y \qquad u : Z \longrightarrow Y$

وحيث v و u لا يوجد تركيب بينهما.

4- لتكن $\mathcal{L}_X$ الفئة وحيدة الشيء و $\mathcal{L}$ فئة أخرى و
وليكن $A \in ob(\mathcal{L})$ فإن $F : \mathcal{L}_X \longrightarrow \mathcal{L}$ هو دالي مباشر
$F(X) = A$ "تحقق من ذلك"

5- لتكن $\mathcal{L}_{X,Y}$ الفئة ثنائية الشيء، ولتكن $\mathcal{L}$ فئة أخرى
و $A , B \in ob(\mathcal{L})$

لنعرف: $F : \mathcal{L}_{X,Y} \longrightarrow \mathcal{L}$

بالشكل: $F(X) = A \ \& \ F(Y) = B$

"أثبت أنه دالي مباشر..."

تكافؤ الفئات

مبرهنة لتكن $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ فئات، $\left\{\begin{array}{l} F: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2 \\ G: \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_3 \end{array}\right.$ دوال

عندئذ:

1- إذا كانت الدوال F, G مباشرة عندئذ $G\circ F: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_3$ هو دالي مباشر

2- " " " F, G غير مباشرة فإن $G\circ F: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_3$ هو دالي مباشر..

الإثبات:

1- لنفرض أن الدوال F, G مباشرة عندئذ حسب التطبيقات:

$$F: ob(\mathcal{L}_1) \longrightarrow ob(\mathcal{L}_2)$$
$$G: ob(\mathcal{L}_2) \longrightarrow ob(\mathcal{L}_3)$$

ومنه نجد التطبيق $$G\circ F: ob(\mathcal{L}_1) \longrightarrow ob(\mathcal{L}_3)$$

أيضاً: $$F: Mor(\mathcal{L}_1) \longrightarrow Mor(\mathcal{L}_2)$$
$$G: Mor(\mathcal{L}_2) \longrightarrow Mor(\mathcal{L}_3)$$

ومنه نجد التطبيق: $$G\circ F: Mor(\mathcal{L}_1) \longrightarrow Mor(\mathcal{L}_3)$$

$$\forall A \in ob(\mathcal{L}_1) \;;\quad G\circ F(A) = G(F(A))$$

ليكن $A, B \in ob(\mathcal{L}_1)$ ، $u: A \to B$ عندئذ:

$$F(u): F(A) \longrightarrow F(B) \in \mathcal{L}(F(A), F(B))$$
$$G(F(u)): G(F(A)) \longrightarrow G(F(B)) \in \mathcal{L}_3(G(F(A)), G(F(B)))$$
$$\Rightarrow G\circ F(u): G\circ F(A) \longrightarrow G\circ F(B)$$

$$\forall A \in ob(\mathcal{L}_1) \quad : \quad G\circ F(I_A) = G(F(I_A)) = G(I_{F(A)})$$
$$= I_{G(F(A))} = I_{G\circ F(A)}$$

ليكن $f: A \longrightarrow B \;,\; g: B \longrightarrow D$ مورفيزمات للفئة $\mathcal{L}_1$

$$G \circ F(g.f) = G(F(g.f)) = G(F(g).F(f))$$ (لأن F مباشر)

$$= G(F(g)).G(F(f))$$ (لأن G مباشر)

$$= G \circ F(g).G \circ F(f)$$

إذاً هو دالي مباشر.

2 ـ لنفرض أن الدوال F, G غير مباشرة .. عندئذ توجد التطبيقات.

$$F: ob(\mathcal{L}_1) \longrightarrow ob(\mathcal{L}_2)$$

$$G: ob(\mathcal{L}_2) \longrightarrow ob(\mathcal{L}_3)$$

$$G \circ F: ob(\mathcal{L}_1) \longrightarrow ob(\mathcal{L}_3)$$ هو تطبيق

أيضاً:

$$F: Mor(\mathcal{L}_1) \longrightarrow Mor(\mathcal{L}_2)$$

$$G: Mor(\mathcal{L}_2) \longrightarrow Mor(\mathcal{L}_3)$$

$$G \circ F: Mor(\mathcal{L}_1) \longrightarrow Mor(\mathcal{L}_3)$$

$$\forall A \in ob(\mathcal{L}_1) \;;\; G \circ F(A) = G(F(A))$$

ليكن $u: A \longrightarrow B$ ولدينا $A, B \in ob(\mathcal{L}_1)$

عندئذ: $F(u): F(B) \longrightarrow F(A) \in \mathcal{L}_2(F(B), F(A))$

$$G(F(u)): G(F(A)) \longrightarrow G(F(B)) \in \mathcal{L}_3(G(F(A)), G(F(B)))$$

$$\Rightarrow G \circ F(u): G \circ F(A) \longrightarrow G \circ F(B)$$

$$\forall A \in ob(\mathcal{L}_1): \quad G \circ F(I_A) = G(F(I_A)) = G(I_{F(A)})$$

$$= I_{G(F(A))} = I_{G \circ F(A)}$$

$$G \circ F(g.f) = G(F(g.f)) = G(F(f).F(g))$$

$$= G(F(g)).G(F(f)) = G \circ F(g).G \circ F(f)$$

تمهيدية: لتكن $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ فئات، ولتكن $F, G : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ دوال مباشرة

ولتكن: $T : \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_3$ دالي مباشر

إذا كان $f : F \longrightarrow G$ مورفيزم دالي عندئذ يوجد مورفيزم دالي:

$$T\circ f : T\circ F \longrightarrow T\circ G$$

$$\forall A \in ob(\mathcal{L}_1) : T\circ f(A) = T(f(A))$$

الإثبات

ليكن $A \in ob(\mathcal{L}_1)$ عندئذ: $F(A), G(A) \in ob(\mathcal{L}_2)$

وأن: $T\circ F(A), T\circ G(A) \in ob(\mathcal{L}_3)$

نعرف:

$$T\circ f : T\circ F \longrightarrow T\circ G$$

$$T\circ f(A) : T\circ F(A) \longrightarrow T\circ G(A)$$

والذي سيشكل مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_3$

ليكن: $u : A \longrightarrow B \in \mathcal{L}_1(A,B)$ ولنبرهن على أن المخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{array}{ccc} T\circ F(A) & \xrightarrow{\quad T\circ f(A) \quad} & T\circ G(A) \\ {\scriptstyle T\circ F(u)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T\circ G(u)} \\ T\circ F(B) & \xrightarrow{\quad T\circ f(B) \quad} & T\circ G(B) \end{array}$$

أي أن: $T\circ G(u) \cdot T\circ f(A) = T\circ f(B) \cdot T\circ F(u)$

$$T\circ G(u) \cdot T\circ f(A) = T(G(u)) \cdot T(f(A))$$
$$= T(G(u) \cdot f(A))$$

بما أن $f : F \longrightarrow G$ مورفيزم دالي عندئذ لأجل المورفيزم $u : A \to B$

المخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\quad f(A) \quad} & G(A) \\ {\scriptstyle F(u)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(u)} \\ F(B) & \xrightarrow{\quad f(B) \quad} & G(B) \end{array}$$

أي أن $G(u) \cdot f(A) = f(B) \cdot F(u)$ نعوض في العلاقة

$$T\circ G(u) \cdot T\circ f(A) = T(f(B) \cdot F(u)) = T(f(B)) \cdot T(F(u))$$
$$= T\circ f(B) \cdot T\circ F(u)$$

أصبح المخطط تبديلي

و $T\circ f$ مورفيزم دالي.

$\boxed{\text{مبرهنة}}$

لتكن $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ فئات ولتكن

$F: \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ دالي مباشر

أيضاً $G, T: \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_3$ دوال مباشرة

إذا كان $\psi: G \longrightarrow T$ مورفيزم دالي عندئذ يوجد مورفيزم دالي:

$$\psi o F : G o F \longrightarrow T o F$$

والذي نعرفه بالشكل الآتي:

$$\forall A \in ob(G o F)$$

$$\psi o F(A) = \psi(F(A))$$

الإثبات:

ليكن $A \in ob(\mathcal{L}_1)$ عندئذ $F(A) \in ob(\mathcal{L}_2)$

$$G(F(A)),\ T(F(A)) \in ob(\mathcal{L}_3)$$

لنعرف:

$$\psi o F : G o F \longrightarrow T o F$$

بالشكل:

$$\psi o F(A) : G o F(A) \longrightarrow T o F(A)$$

$$\psi o F(A) = \psi(F(A))$$

مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_3$

ليكن $u: A \longrightarrow B$ ، ولنبرهن على أن المخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{array}{ccc}
G o F(A) & \xrightarrow{\ \psi o F(A)\ } & T o F(A) \\
{\scriptstyle G o F(u)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle T o F(u)} \\
G o F(B) & \xrightarrow{\ \psi o F(B)\ } & T o F(B)
\end{array}$$

أي:

$$T o F(u) \cdot \psi o F(A) = \psi o F(B) \cdot G o F(u)$$

علماً أن $T \longrightarrow G ، \psi$ مورفيزم دالي باعتبار الموريفزم $v: A' \longrightarrow B'$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_2$

يكون المخطط الآتي تبادلي:

$$\begin{tikzcd}
G(A') \arrow[r, "\psi(A)"] \arrow[d, "G(v)"'] & T(A') \arrow[d, "T(v)"] \\
G(B') \arrow[r, "\psi(B)"] & T(B')
\end{tikzcd}$$

هذا المخطط صحيح من أجل كل $u: A \longrightarrow B$

أي أن $\circledast \ldots\ldots T(v) . \psi(A') = \psi(B') . G(v)$

$$T \circ F(v) . \psi \circ F(A) = T(F(u)) . \psi(F(A))$$

مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_2$ — أحد أشياء $\mathcal{L}_2$

$$= \psi(F(B)) . G(F(u))$$

$$= \psi \circ F(B) . G \circ F(u)$$

«لأننا اعتبرنا $v = F(u)$ وطبقنا العلاقة $\circledast$

تعريف «التكافؤ لفئتين»

ليكن $F: \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ دالي مباشر..

نقول أن F يشكل تكافؤ للفئة $\mathcal{L}_1$ و $\mathcal{L}_2$، إذا وجد دالي مباشر آخر

$G: \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_1$.

$$\varphi: I_{\mathcal{L}_1} \longrightarrow G \circ F$$

$$\psi: I_{\mathcal{L}_2} \longrightarrow F \circ G$$

إذا وجد مورفيزمات دالية تحقق أن: $\boxed{F \circ \varphi = \psi \circ F}$

أثبت أن المطابق على أي فئة $\mathcal{L}$ $I_{\mathcal{L}}$ هو دالي مباشر $I_{\mathcal{L}}: \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$

$F \circ \varphi$ ، $\psi \circ F$ هي مورفيزمات دالية

انتهت المحاضرة