المحاضرة الثانية عشرة

لتكن $X \neq \phi$. ولتكن $\phi \neq A, B \subsetneq X$

$\tau = \{\phi, B, X, A\}$

عندئذ: ① إذا كانت المجموعتين A, B إحداهما محتواة في الأخرى فإن τ توبولوجيا

② إذا كانت $\{A, B\}$ تشكل تجزئة لـ X أي أن

$(X = A \cup B \quad , \quad A \cap B = \phi)$

فإن τ توبولوجيا على X.

③ إذا كانت $\tau = \{\phi, X, A, B\}$ توبولوجيا على X فإنه:

إما A, B إحداهما محتواة في الأخرى أو $\{A, B\}$ تشكل تجزئة لـ X

تمرين:

أوجد جميع التوبولوجيات التي يمكن تعريفها على $X = \{a, b, c\}$

والمؤلفة من أربع مجموعات مفتوحة

لما كانت $A = \{a\}$ فإن

$$B$$

A, B تشكلان تجزئة	$A \subset B$
$B = \{b, c\}$	$B = \{a, b\}, B = \{a, c\}$

وهلم جرا ... الخ

ملاحظة: لتكن $X \neq \phi$ ، $\phi \neq A_1, A_2, \dots, A_n \subsetneq X$

① لتكن $\tau = \{\phi, X, A_1, A_2, \dots, A_n\}$

عندئذ ⓐ إذا كان $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \dots \subsetneq A_n$ فإن τ توبولوجيا على X

ⓑ إذا كان $A_1, \dots, A_n$ تشكل تجزئة لـ X أي أن

$(A_i \cap A_j = \phi \ \forall i \neq j \ , \ A_1 \cup \dots \cup A_n = X)$

فإن τ توبولوجيا على X

المتتاليات على فضاء تبولوجي

تعريف المتتالية على مجموعة ما X

نُعرف المتتالية على X بأنها أي تابع

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow X$$

$$n \longmapsto a(n) = a_n$$

$0 \mapsto a_0 \ , \ 1 \mapsto a_1 , \dots \quad m \mapsto a_m$

تذكرة: نهاية المتتالية في $\mathbb{R}$: لتكن $(a_n)_{n\geq 1}$ متتالية من الأعداد الحقيقية، ولتكن $a \in \mathbb{R}$ ، عندئذٍ الشروط التالية متكافئة:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
2. $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$
3. $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[)$

   $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \{a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots\} \subset]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$
4. كل مجال مفتوح مركزه (a) يحوي جميع حدود المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ اعتباراً من حد معين (يحوي جميع حدود المتتالية باستثناء عدد منتهٍ منها)
5. كل مجال مفتوح يحوي a يحوي جميع حدود المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ باستثناء عدد منتهٍ منها
6. كل مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ وفق التبولوجيا المألوفة وتحوي a يحوي جميع حدود المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ باستثناء عدد منتهٍ منها.

* إنّ ما سبق يمهد لتعريف نهاية متتالية في فضاء تبولوجي ما

تعريف:

ليكن (X, τ) فضاء تبولوجي ولتكن $(a_n)_{n\geq 1}$ متتالية في X ، نقول إنّ المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ متقاربة من $a \in X$ إذا كانت: كل مجموعة مفتوحة تحوي a يحتوي جميع حدود المتتالية a_n باستثناء عدد منتهٍ منها

أي أنه، من أجل كل $B\in\tau$ بحيث $a\in B$ فإنه يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in B$$

$$n \geq n_0 \Rightarrow \{a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots\} \subset B$$

ملاحظة

إذا زودنا $\mathbb{R}$ بالتبولوجيا المألوفة (أي كل مجموعة مفتوحة هي إما ϕ أو اجتماع لمجالات مفتوحة) فإن نهاية متتالية الفضاء التبولوجي المألوف على $\mathbb{R}$ هو ذاته مفهوم نهاية متتالية حقيقية كما درس سابقاً..

مثال: لتكن المتتالية الحقيقية $a_n = 1/n$ ، $1 \leq n$

لندرس نهاية هذه المتتالية عند تزويد $\mathbb{R}$ بأحد التبولوجيات التالية:

① τ_1 هي التبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}$ عندها فإنّ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

② τ_2 هي التبولوجيا التافهة على $\mathbb{R}$ ، $\tau_2 = \{\phi, \mathbb{R}\}$

ليكن a أي عدد حقيقي، ولنبحث فيما إذا كانت $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

لتكن B أي مجموعة مفتوحة تحوي a ، وبالتالي $B = \mathbb{R}$ ومنه

يوجد $n_0 = 1$ بحيث

$$n \geq 1 \Rightarrow a_n = 1/n \in \mathbb{R}$$

فالمتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ متقاربة من كل عدد حقيقي $a \in \mathbb{R}$ في $(\mathbb{R}, \tau_2)$

③ $\tau_3 = P(\mathbb{R}) = \{B : B \subset \mathbb{R}\}$ ليكن a أي عدد حقيقي ولنبحث فيما إذا كانت $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ، من أجل ذلك يجب أن تكون كل مجموعة مفتوحة $\tau_3 \ni B$ وتحوي a ستحوي جميع حدود هذه المتتالية $a_n = \frac{1}{n}$ اعتباراً من حد معين.

إن $\tau_3 \ni \{a\}$ و $a \in \{a\}$ لكن $\{a\}$ لن تحوي جميع حدود المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ باستثناء عدد منتهي منها لأن المجموعة $\{a_n = 1/n \; ; n\in\mathbb{N}^*\}$ غير منتهية و $\{a\}$ منتهية وبالتالي المتتالية $a_n = 1/n$ غير متقاربة من أي عدد حقيقي $a \in \mathbb{R}$ في الفضاء التبولوجي $(\mathbb{R}, \tau_3)$

تمرين ادرس تقارب المتتالية الحقيقية $a_n = 1/n$ عند تزويد $\mathbb{R}$ بأحد التبولوجيات التالية:

① τ_1 تبولوجيا زارسكي على $\mathbb{R}$

② $\tau_2 = \{\phi, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\; : a \in \mathbb{R}\}$

③ $\tau_3 = \{\phi, \mathbb{R}\} \cup \{]-\infty, a[\; : a \in \mathbb{R}\}$

نتيجة

ليكن (X, τ) فضاء تبولوجي ولتكن $A \subset X$ ولتكن $(a_n)_{n\geq 1}$ متتالية من عناصر A ولنفرض أن $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ عندئذٍ فإن $a \in \bar{A}$ ، أي أن نهاية متتالية من عناصر مجموعة ستكون نقطة ملاصقة لتلك المجموعة

الإثبات نعلم أن:

$$(a \in \bar{A}) \Leftrightarrow (\forall B \in \tau : a \in B \Rightarrow A \cap B \neq \phi)$$

لتكن B أي مجموعة تحوي a ، بما أن $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ فإنه يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$n \geq n_0 \Rightarrow \{a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots\} \subset B$$

لكن $\{a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots\} \subset A \Rightarrow A \cap B \neq \phi \Rightarrow a \in \bar{A}$

التبولوجيا النسبية ، الفضاءات التبولوجية الجزئية

مبرهنة وتعريف

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن $A \subset X$ عندئذٍ فإن

$$\tau_A = \{ A\cap B \ ; \ B\in\tau \}$$

تبولوجيا على A ندعوها بالتبولوجيا النسبية على A وندعو (A,τ_A) فضاء تبولوجي جزئي من (X,τ) وندعو عناصر τ_A مجموعات مفتوحة بالنسبة لـ A (مجموعات مفتوحة في A) أي كل مجموعة T مفتوحة في A متكون من الشكل

$$T = A\cap B \ ; \ B\in\tau$$

الإثبات

(1) $\phi\in\tau \Rightarrow \phi = A\cap\phi \in\tau_A$

$X\in\tau \Rightarrow A = A\cap X\in\tau_A$

(2) $T_1\cap T_2\in\tau_A \Longleftarrow T_1, T_2\in\tau_A$ لنفرض

$$T_1, T_2\in\tau_A \Rightarrow \exists\ B_1, B_2\in\tau :$$

$$T_1 = A\cap B_1 \ \wedge \ T_2 = A\cap B_2 \Rightarrow$$

$$T_1\cap T_2 = (A\cap B_1)\cap(A\cap B_2) = A\cap\underbrace{(B_1\cap B_2)}_{\in\tau}$$

$$\Rightarrow T_1\cap T_2\in\tau_A$$

(3) لنبرهن أن:

$$c_i\in\tau_A \ , \ \forall i\in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} c_i\in\tau_A$$

$$C_i \in \tau_A \ \forall i \in I \Rightarrow \exists B_i \in \tau : i \in I :$$
$$C_i = A \cap B_i \ \forall i \in I$$
$$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} C_i = \bigcup_{i \in I}(A\cap B_i) \ \forall i \in I$$
$$= A \cap \Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) \in \tau_A$$

مثال

لتكن الفضاء التبولوجي (X,τ) حيث $X=\{a,b,c,d\}$

$$\tau = \{\phi, X, \{a,b\}, \{c,d\}\}$$

إذا كانت $A=\{b,c\}$ فأوجد τ_A

$$\tau_A = \{\phi\cap A, X\cap A, \{a,b\}\cap\{b,c\}, \{c,d\}\cap\{b,c\}\}$$
$$= \{\phi, A, \{b\}, \{c\}\}$$

ونلاحظ أن τ_A هي تبولوجيا على A لأن $\{\{b\},\{c\}\}$ تجزئة A

تمرين لنزود $\mathbb{R}$ بالتبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}$، أوجد:

$\tau_{\mathbb{N}}$ ، $\tau_{]a,b[}$

ملاحظة لتكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن $A \subset X$ ، عندئذٍ:

(1) ليس بالضرورة أن يكون $\tau_A \subset \tau$

(2) إذا كانت $A \in \tau$ $\Rightarrow$ $\tau_A \subset \tau$

$$\forall B \in \tau : A\cap B \in \tau \ ; \ \tau_A = \{A\cap B \ ; \ B \in \tau\}$$

(3) $A \in \tau \iff \tau_A \subset \tau$

(4) إذا كانت A مجموعة مفتوحة في X فإن المجموعة المفتوحة في A هي جميع المجموعات المفتوحة في X والمحتواة في A

انتهت المحاضرة