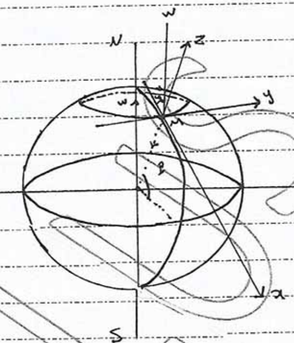
القسم: رياضيات .... **السنة:** الثانية .... **المحاضرة:** الخامسة عشر والأخيرة

المادة: ميكانيك (II) **التاريخ:** ١٥/٠٥/٢٠٢٤ **الدكتور:** جليلة جيمي ......

مثال: ادرس ميلان الاجسام الساقطة عن الشاقول.

الحل:



لندرس السقوط الحر لنقطة مادية M على سطح الأرض من ارتفاع قليل بالمقارنة مع نصف قطر الكرة الأرضية حيث تؤثر على هذه النقطة قوة الثقالة الأرضية فقط والتي نعتبرها ثابتة وسوف نهمل مقاومة الهواء لحركة هذه النقطة.

لنأخذ جملة إحداثية متحركة مع الأرض فيها المحور oz يتجه شاقولياً نحو الأعلى والمحور ox مماس لخط طول ومتجه نحو الجنوب وأخيراً المحور oy مماس لخط عرض ويتجه نحو الشرق.

عند معالجة سقوط النقطة بالنسبة للجملة الإحداثية المختارة يجب أخذ قوى العطالة الجرية والمتممة بعين الاعتبار كقوى تؤثر على هذه النقطة بالإضافة إلى قوة جذب الأرض.

أولاً لنتعرف على هذه القوى:

أولاً: إن قيمة قوة العطالة الجرية J_e: $J_e = mW^2 r$

ذلك لأن دوران الأرض حول محورها يتم بسرعة زاوية W ثابتة و r هو بعد النقطة عن محور الدوران.

هذه القوة تكون عامودية على محور الدوران لأن دوران الأرض حول محورها يعتبر بطيئاً بالنسبة لبقية النجوم ويتم بسرعة دوران (1) وذلك خلال 23 ساعة و 56 دقيقة و 4 ثواني

أي أن السرعة الزاوية:

$$W = \frac{2\pi}{t} = \frac{2\pi}{86164} \simeq 0.0000722$$

حيث تم تحويل الساعات والدقائق إلى ثوان

ومن ذلك يتبين صغر قوة العطالة الجرية.

فهذه القوة تتناسب طرداً مع مربع W فإذا رمزنا بالحرف $\vec{F}$ لقوة جذب الأرض للنقطة المادية ووجدنا:

$$\vec{F} + \vec{J_e} = \vec{P}$$

فإن الاختلاف بين قيمتي P و F يكون صغيراً جداً وعلى هذا الشكل نرى أن قوة العطالة الجرية تدخل في قوة الثقالة $f = mg$ الملقبة حسب الاتجاه السالب للمحور oz

يتبين مما سبق أنه من أجل دراسة تأثير دوران الأرض على سقوط الأجسام يكفي فقط إضافة قوة العطالة المتممة J_c للقوة P.

دراسة عملية: معادلات الحركة:

$$mx'' = -m\Gamma_{cx}$$

$$my'' = -m\Gamma_{cy}$$

$$mz'' = -m\Gamma_{cz} - mg$$

$$\Gamma_c = 2(w \times V_r) \Rightarrow \Gamma_c = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ w_x & w_y & w_z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

ولنرمز بـ φ لزاوية العرض لنقطة M و بالتالي فإن مساقط السرعة الزاوية :

$$w_x = -w\cos\varphi$$

$$w_y = 0 \quad , \quad w_z = w\sin\varphi$$

$$\Gamma_c = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -w\cos\varphi & 0 & w\sin\varphi \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_{cx} &= -2w\sin\varphi . y' \\ \Gamma_{cy} &= 2(w\cos\varphi . z' + w\sin\varphi\, x') \\ \Gamma_{cz} &= -2w\cos\varphi . y' \end{aligned}\right\} \quad ---(1)$$

نستطيع مكاملة هذه المعادلات مرة واحدة نظراً لأن w و φ ثوابت.

ولنفرض أن النقطة المادية كانت في لحظة البدء بدء سقوطها واقعة في المبدأ وأن سقوطها تم بدون سرعة ابتدائية فإن :

$$t = 0 \begin{cases} x = y = z = 0 \\ x' = y' = z' = 0 \end{cases}$$

وبالتالي نحصل على الشكل التالي وبعد الاختصار على m :

$$\left.\begin{aligned} x' &= 2w\sin\varphi . y \\ y' &= -2(w\cos\varphi . z + w\sin\varphi . x) \\ z' &= 2w\cos\varphi . y - gt \end{aligned}\right\} \quad ---(2)$$

ويكون ذلك بعد المكاملة والأخذ بعين الاعتبار شروط البدء.

إن مكاملة معادلات (2) بالطريقة العادية ليس بالسهل
ولذلك سوف نكامل بطريقة السلاسل التقريبية.
نلاحظ هنا صغر w وبالتالي نأخذ التقريب الأول بناءً على ذلك
بأخذ $w=0$ ونسميا هذا التقريب بالتقريب الصفري.
وبالتالي يكون لدينا:

$$\left.\begin{aligned} x'' &= 0 \\ y'' &= 0 \\ z' &= -gt \end{aligned}\right\} \text{-----} \quad (3)$$

إذا أخذنا شروط البدء السابقة نجد:

$$x=0 \quad , \quad y=0 \quad , \quad z=-\frac{1}{2}gt^2 \text{---} \quad (4)$$

هذه المعادلات تعطي قانون الحركة للنقطة المادية بدون أخذ دوران الأرض بعين الاعتبار وهي الحالة التي تطابق سقوط النقطة شاقولية.
بوضع هذه القيم في المعادلات (2) يكون لدينا:

$$\left.\begin{aligned} x' &= 0 \\ y' &= wgt^2 \cos\varphi \\ z' &= -gt \end{aligned}\right\} \text{-----} \quad (5)$$

بالمكاملة نحصل على التقريب الثاني:

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= \frac{w}{3} g t^3 \cos\varphi \\ z &= -\frac{g}{2} t^2 \end{aligned}\right\} \text{-----} \quad (6)$$

هذه المعادلات تعطي قانون حركة النقطة المادية حيث تدخل فيها قوة العطالة المتممة.
بعبارة أخرى ظهور تأثير دوران الأرض على الأجسام الساقطة

تبين من هذه المعادلات أنه عند سقوط النقطة المادية فإنها تميل عن الشاقول باتجاه الشرق وميلانها يعطى بالعلاقة:

$$y = \frac{w}{3} t^3 \cos \varphi$$

مثال: يتم الصعود الشاقولي لطائرة عامودية وفق المعادلة:

$$Z = 0.25 t^2$$

أما معادلة دوران مروحتها فتأخذ الشكل التالي:

$$\varphi = 3t^2$$

حيث الزمن يقدر بالثانية و Z بالمتر و φ بالراديان.

أوجد السرعة المطلقة والتسارع المطلق لنقطة M من المروحة تبعد مقدار $R = 0.5\ m$ وذلك خلال مرور خمس ثوان الأولى من الإقلاع.

الحل: نأخذ جملة إحداثية متحركة مع هيكل الطائرة وجملة إحداثية أخرى ثابتة ترتبط مع الأرض.

تتكون الحركة المركبة للنقطة M من حركتها مع المروحة (حركة دورانية) ثم حركتها الشاقولية مع هيكل الطائرة وهي حركة مستقيمة.

تعتبر الحركة الدورانية للمروحة حركة نسبية وهذه الحركة يشاهدها جالس الطائرة ومرتبط مع الجملة الإحداثية المتحركة.

أما الصعود الشاقولي للطائرة فيعتبر حركة جرية.

لنأخذ الآن نظرية تركيب السرعة:

$$V_a = V_e + V_r$$

إن السرعة الجرية للنقطة M تساوي سرعة أي نقطة من هيكل الطائرة تنطبق في لحظة زمنية على هذه النقطة.

وبما أن جميع النقاط في حركة الصعود تكون واحدة وتعطى وفق معادلة صعود الطائرة:

$$z = 0.25 t^2$$

إذن السرعة الجرية تكون:

$$V_e = z' = 2 \times 0.25 t = 0.5 t$$

من أجل الحصول على السرعة النسبية للنقطة M يلزم تحديد السرعة الزاوية للمروحة التي تتحدد كما نعلم في الحركة الدائرية باشتقاق معادلة زاوية الدوران أي:

$$\omega = \varphi' = 6t$$

عندئذٍ السرعة النسبية للنقطة في الحركة الدائرية:

$$V_r = R . \omega = 3t$$

بما أن السرعة الجرية والسرعة النسبية في هذه الحالة متعامدتان فإن:

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{9.25}\ t$$

وبتعويض $t = 5$ تكون:

$$V_a = 15.21\ m/s$$

ـ انتهت المحاضرة ـ