محاضرة: بسم الله الرحمن الرحيم، د: صيم جديد

- في هذه المحاضرة سنتعرف على نموذج خطي لكتافة أخذناه وبينا أنه نموذج خطي ونموذج نقل، وسوف نرى كيف نحول الشروط على شروط خطية وبذلك يتحول النموذج اللاخطي إلى خطي.

كما سنتعرف على النماذج الرافقة.

× بعض النماذج اللاخطية:

- مثال:

«نموذج نقل المواد بأقصر فترة زمنية كانت اللاخطية بتابع الهدف حيث كان:

$$Z = t_x^* = [\max_{ij} \min [t_{ij}]_x]$$

× مسألة:

يوجد في ورشة ميكانيك آلة ثقب بالضغط وخمس آلات مزدوجة وتستخدم هذه الآلات لإنتاج منتج مجمع من جزأين (أول وثاني) ونعطي انتاجية كل من الآلات لأي من الجزئين بالجدول التالي:

«إنتاجية ⟺ كل جزء كم من الوقت سيستغرقه كل هذه الآلة»

الجزء	زمن الإنتاج مقدراً بالدقيقة للجزء	
	الثقب	المزدوجة
1	3 دقائق	20 دقيقة
2	5 دقائق	15 دقيقة

«نستنتج من الجدول:

الجزء الواحد من النوع الأول يحتاج 3 دقائق من آلة الثقب و 20 دقيقة من آلة المزدوجة وهكذا بالنسبة للنوع الثاني فإنه الجزء الواحد منه يحتاج لـ 5 دقائق من آلة الثقب و 15 دقيقة من آلة المزدوجة»

المطلوب:

نرغب بالحفاظ على أعباء عمل متوازنة بين الآلات بحيث لا تعمل أي آلة بما يزيد عن 30 دقيقة في اليوم عن بقية الآلات، بفرض أن أعمال المزدوجة توزع على نحو متساوٍ بين الآلات ~~المزدوجة~~ المزدوجة الخمس وبفرض أن طول يوم العمل العادي 8 ساعات المطلوب:

مستثمر رغب عمل الآلات للحصول على العدد الأعظمي من القطع المطبعة
الكلي : نفرض X_1 ما ينتج من الجزء الأول
نفرض X_2 ما ينتج من الجزء الثاني.
عمل آلة الثقب هو $3X_1 + 5X_2 \leq 480$
عمل آلة الكبس هو : $20X_1 + 15X_2$
وبالتالي فإن عمل الآلة الواحدة :

$$\frac{20X_1+15X_2}{5} = 4X_1+3X_2 \leq 480$$

حيث : $480 = 8 \times 60$ دقيقة
فإن الفرق بين أعباء عمل الآلات هو :

$$|3X_1+5X_2-(4X_1+3X_2)| \leq 30$$
$$\Rightarrow |-X_1+2X_2| \leq 30$$
$$\Rightarrow |2X_2-X_1| \leq 30$$
$$\Rightarrow -30 \leq 2X_2-X_1 \leq 30$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2X_2-X_1 \leq 30 \\ X_1-2X_2 \leq 30 \end{cases}$$ معادلتين خطيتين

$$X_1, X_2 \geq 0$$

إن تابع القيمة المطلقة هو تابع لا خطي تمنا بتحويله إلى معادلتين خطيتين وبذلك نكون قد حولنا المسألة من لا خطية إلى خطية.
لنكتب : $y = Min(X_1, X_2)$
فإن تابع الهدف يكون :

$$Z = Max[Min(X_1, X_2)]$$
$$Z = y \longrightarrow Max$$
$$y \leq X_1 \cdot y \leq X_2$$

وبالتالي يكون النموذج الرياضي :
أوجد القيمة العظمى للتابع :

$$Z = y \longrightarrow Max$$

وفق الشروط :

$$3X_1 + 5X_2 \leq 480$$
$$4X_1 + 3X_2 \leq 480$$

والقيمة : $|-X_1+2X_2|$

الذي يول إلى معادلتين خطيتين :

$2x_2 - x_1 \leq 30$

$x_1 - 2x_2 \leq 30$

$y \leq x_1$ & $y \leq x_2$

$x_1 \cdot x_2 \cdot y \geq 0$

تذكير: الكتابة التي تسبقه كتابة النموذج الرياضي هاقة جدا لكتابة النموذج الرياضي.

* النموذج البرامجي :

إذا كان لدينا

$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots \longrightarrow Max$

وفق الشروط :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$
$$x_j \geq 0 \; ; \; j = \overline{1,n}$$

ماهو النموذج البرامجي لهذا النموذج:

أولا نقوم بكتابة تابع الهدف :

نأخذ (الكميات المتوفرة / المواد الأولية / الاحتياطي / الإمكانيات المتاحة) والتي تمثل $b_1 \dots b_m$ ونضربها بالمجهولات $(y_1 \dots y_m)$ التي تضيفها مقابل كل شرط من الشروط السابقة بحيث :

y_1 : الكمية المنتجة .

b_1y_1 : الكمية المستهلكة من المادة b_1 بإنتاج الكمية y_1 وبالتالي يكون :

$$L = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \longrightarrow Min$$

الآن كيف نضع الشروط :

نضع الشروط على كل المجهول لوحده بالشكل :

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1$$
$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2$$
$$\vdots$$
$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + a_{3n}y_3 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n$$
$$y_i \geq 0 \; ; \; i = \overline{1,m}$$

* نظريات مختلفة حول المرافقة :

1- إن النموذج المرافق للنموذج المرافق هو النموذج الأصلي نفسه .

2- إذا كان $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ حلا مقبولا للنموذج وكان $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ حلا مقبولا للنموذج المرافق فرضنا أنه قيمة تابع الهدف للنموذج الأصلي لا تتجاوز قيمة (تابع الهدف) النموذج المرافق عند هذين الحلين أي :

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

وذلك من أجل جميع الحلول المقبولة عائدتها كل للآخر .

3- إذا كان تابع الهدف في أحد النموذجين غير محدود فيكون الحل المثالي للنموذج الآخر غير مقبول لتحقق الشروط .

4- إذا كان أحد النموذجين حل مثالي محدود فإن النموذج الآخر حل مثالي محدود وقيمتا تابعي الهدف يجديان متساويين أي :

$$Max\ z = Min\ L$$

5- نظرية المرافقة :

الشرط اللازم والكافي ليكون الحلان المقبولان $(x_1, \dots, x_n)$ و $(y_1, \dots, y_m)$ على التوالي حلين مثاليين للنموذج الأصلي ومرافقه هي أن تكون قيمتا تابعي الهدف متساويين و أن تحققا العلاقتين :

$$① \quad x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j \right) = 0 \quad ; \quad j = \overline{1,n}$$

$$② \quad y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right) = 0 \quad ; \quad i = \overline{1,m}$$

وبعبارة أخرى :

إذا كانت قيمة أحد مركبات الحل المثالي $x_j \neq 0$ في النموذج الأصلي فإن الحل المثالي للنموذج المرافق يحقق المتراجحة المقابلة لذلك المجهول x_j مساواة تامة أي إذا كان :

$$x_j \neq 0 \iff \text{بالتالي} \iff a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + \dots + a_{mj} y_m = c_j$$

$$y_i \neq 0 \iff \text{بالتالي} \iff a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n = b_i$$

* المضمون الاقتصادي للبرنامج المرافق نوضحه من خلال المثال التالي :

تنتج إحدى الشركات نوعين من المنتجات B_1 و B_2 حيث أن المقادير اللازمة من

هاتين المادتين في نتاج الوحدة الواحدة من كلا من المنتجين A_1, A_2 والكمية الاحتياطية المتوفرة من كل منها والربح للوحدة مبينة بالجدول التالي :

المنتجات / المواد الأولية	حاجة نتاج الوحدة الواحدة		الكميات المتوفرة
	A_1	A_2	
B_1	5	10	160
B_2	1	1	24
C_j	90	100	

المطلوب :

1- أوجد الخطة الإنتاجية المثالية التي تجعل قيمة منتجات هذه الشركة (الربح) أكبر ما يمكن .

2- أوجد النموذج الرياضي .

3- إذا كان : $X_1=16$, $X_2=8$ $Z=2240$

أوجد كل المتبقي للنموذج الرياضي .

ب- ما المضمون الاقتصادي للنموذج الأصلي والنموذج الرياضي .

ج- ما العلاقة بين هذين النموذجين .

الحل : ① نفرض X_1 الكمية المنتجة من المنتج A_1

A_2 " " " X_2

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 = 90X_1 + 100X_2$$

قيد الشروط :

$$5X_1 + 10X_2 \leq 160$$

$$X_1 + X_2 = 24$$

$$X_1 . X_2 \geq 0$$

وبالتالي يكون النموذج الرياضي أوجد :

$$Z = 90X_1 + 100X_2 \longrightarrow MAX$$

قيد الشروط :

$$5X_1 + 10X_2 \leq 160$$

$$X_1 + X_2 \leq 24$$

$$X_1 . X_2 \geq 0$$

ج/ لدينا،

$$Z = 90x_1 + 100x_2 \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} y_1 : & 5x_1 + 16x_2 \leq 160 \\ y_2 : & x_1 + x_2 \leq 24 \end{cases} \quad ; x_1, x_2 \geq 0$$

ومنه مباشرة المزدوج الموافق:

$$L = 160y_1 + 24y_2 \longrightarrow Min$$

$$5y_1 + y_2 \geq 90$$

$$10y_1 + y_2 \geq 100 \quad ; y_1, y_2 \geq 0$$

العلاقة:

عندما تكون دالة الهدف تسعى إلى Max فإن الشروط (أصغر أو يساوي).
أما عندما تسعى الـ Min فإن الشروط (أكبر أو يساوي)

ج/ باستخدام العلاقة،

$$x'_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y'_i - c_j\right) = 0 \quad ; j = \overline{1,n}$$

بالتعويض يكون،

$$16[5y'_1 + y'_2 - 90] = 0$$

$$8[10y'_1 + y'_2 - 100] = 0$$

① $\Rightarrow 80y'_1 + 16y'_2 - 1440 = 0$

② $\Rightarrow 80y'_1 + 8y'_2 - 800 = 0$

نحصل على حل مشترك،

بطرح ② من ① نجد: $8y'_2 - 640 = 0 \Rightarrow y'_2 = 80$

نعوض في ①:

$$80y'_1 + 16(80) - 1440 = 0$$

$$80y'_1 + 1280 - 1440 = 0$$

$$80y'_1 - 160 = 0 \Rightarrow y'_1 = 2$$

ومنه مباشرة تابع الهدف،

$$L = 160y'_1 + 24y'_2 = 160(2) + 24(80)$$

$$= 320 + 1920 = 2240$$

نلاحظ أن قيمتي دالتي الهدف للمزدوجين متساويتين: $Z = L = 2240$

السبت الأحد الإثنين الثلاثاء الأربعاء الخميس الجمعة | التاريخ: / / | الموضوع :

ب) إن متغيرات التابع الأصلي هي كميتي الإنتاج X_1 و X_2 من A_1 و A_2 إن هذه الكميات مضروبة بالربح تعطينا بـ ملفات أيّا متغيرات في تابع الهدف في النموذج المرافق عبارة عن y_1 و y_2 لواحدة المواد الأولية B_1 و B_2 مضروبة بالكميات المتوفرة تعطينا كلفة الإنتاج

* تسمى هذه المتغيرات بالأسعار السرية أو الأسعار الظل.

* إن المتراجحة الأولى من النموذج المرافق تعني أن قيمة ما يلزم من المواد الأولية لصناعة واحدة من المنتج A_1 لا يمكن أن تقل عن ربح الوحدة الواحدة من المنتج A_1.

* إن المتراجحة الثانية في النموذج المرافق تعني أن قيمة ما يلزم من المواد الأولية لصناعة واحدة من المنتج A_2 لا يمكن أن تقل عن ربح الوحدة الواحدة من المنتج A_2.

* - إن النموذج الأصلي يعطينا أفضل خطة إنتاج التي تجعل ربح ذلك الإنتاج أكبر ما يمكن.

* - أما النموذج المرافق يعطينا أفضل تشكيلة من أسعار المواد الأولية

د) $\text{Max } Z = \text{Min } L$

بانتهت المحاضرة

Yehia D