تعميم

م(14) الأحد ٢٠ / 4 / 2014 م

راجع:

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$c \in D^\circ$ توجد كرة مفتوحة مركزها c ونصف قطرها δ محتواة في D

فإذا كان $\underline{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ بحيث : $\|h\| < \delta$

فإذا وجدت $\underline{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathbb{R}^n$ يحقق

$$f(c+h) - f(c) = \langle A, h \rangle + \eta(h)\|h\|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_i h_i + \eta(h)\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2}$$

من تعريف النظيم
$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

شرط : $\lim_{\|h\| \to 0} \eta(h) = 0 \Leftarrow$ f قابلة للاشتقاق

نفرض $h_1 \neq 0$, $h_2 = h_3 = \dots = h_n = 0$

نعوض في :

$$f(c_1 + h_1, c_2, \dots, c_n) - f(c) = A_1 h_1 + \eta\sqrt{h_1^2}$$

$$\lim_{h_1 \to 0} \frac{f(c_1+h_1, c_2, \dots, c_n) - f(c)}{h_1} = \lim (A_1 \mp \eta)$$

$$= A_1 + \underbrace{\lim_{\|h\| \to 0} \eta(h)}_{0}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(c) = A_1$$

$$A_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}(c) \; ; \; i = 1, 2, \dots, n$$

$$f(c+h) + f(c) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(c) + \eta\sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$$

$$\lim_{h \to 0} \eta(h) = 0$$

وندعو الدالة الخطية التالية

$$d_i f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$h \longmapsto d_i f(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(c)$$

مشتقه جزئيه للدالة f في النقطة (c) إذ تفاضل f في النقطة (c).
ولتحقيق الانسجام بين هذا التعريف بالتعريف القديم:

$$d x_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$h \longmapsto d_{x_i}(h) = h_i$$
$$x \longmapsto d_{x_i}(x) = x_i$$

$$d_i f(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)\, d x_i(h)$$

$$d_i f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(c)\, \partial x_i$$

مثال: على مشتقة جزئية:

أوجد $d_c f(\underbrace{x-c}_{h})$

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = x^3 + 4xy^2 + 2xy \sin x .$$

في النقطة $c(0,-2)$

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 4y^2 + 2y\sin x + 2xy\cos x$$
$$f_x(0,-2) = 4(4) = 16$$

ترى مشتقتها الجزئية يساوي 0

$$f_y(x,y) = 8xy + 2x\sin x$$
$$f_y(0,-2) = 0$$

تذكر $x-c=h$

$$h = (x,y) - (0,-2) = (\overset{h_1}{x}, \overset{h_2}{y+2})$$
$$d_c f(x-c) = \underbrace{16x}_{\text{مشتقة جزئية أولى}} + \underbrace{0(y+2)}_{\text{مشتقة جزئية الثانية}} = 16x$$

$$d_c f(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{dF}{dx_i}(c)$$

/ /

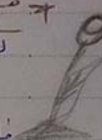
مثال (2):

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \|x\|^{2r}$

$c = (1, 1, \dots, 1)$

أوجد $d_c f(x-c) = ?$ (مشتقة عن طريق الجزيئة)



* مبرهنة مساعدة: (تساعد في البرهان التالي)

لتكن f دالة معرفة بالشكل:

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$c \in D^\circ$

فإذا كانت f قابلة للاشتقاق في c فإنه يوجد عددان K و δ بحيث إذا كانت ($K > 0$, $\delta > 0$)

$\|x - c\| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < K\|x - c\|$

البرهان (من تعريف قابلية الاشتقاق في $\mathbb{R}^n$)

بما أن f قابلة للاشتقاق في c فإنه يوجد $\delta_1 > 0$ بحيث إذا كانت $c \in D^\circ$ يوجد جوار مفتوح حول c

$h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ فإن $\|h\| < \delta_1$.

$$f(c+h) - f(c) = \sum_{i=1}^{n} A_i h_i + \eta(h)\|h\|$$

(نأخذ القيمة المطلقة للطرفين)

بشرط $\lim \eta(h) = 0$

$$|f(c+h) - f(c)| = \left|\sum_{i=1}^{n} A_i h_i + \eta(h)\|h\|\right| \leq$$

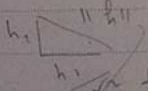
(1) القيمة المطلقة للمجموع أصغر من مجموع القيم المطلقة

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |A_i||h_i| + |\eta(h)|\|h\|$$

(2) القيمة المطلقة للجداء = جداء القيم المطلقة

$$\leq \left[\sum_{i=1}^{n} |A_i| + |\eta(h)|\right]\|h\|$$

لأن $|h_i| \leq \|h\|$



$h_i \leq \|h\|$

$\forall i = 1$ ——

وبما أن $\lim_{h \to 0} \eta(h) = 0$ (لأنه تابع مستمر) حسب تعريف النهاية.

$|A_i||h_i| + |\eta(h)|\|h\| \leq A_i\|h\| + |\eta(h)|\|h\|$

$\lim_{h\to 0} \eta(h) = 0$ ...

$\forall \varepsilon>0;\ \varepsilon = 1,\ \exists \delta_2>0,\ 0<\|h\|<\delta_2 \Rightarrow |\eta - 0|<1$

يوجد $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ و $\|h\|<\delta$

$$|f(c+h) - f(c)| \overset{\text{"*"}}{<} \left[\sum_{i=1}^{n} |A_i| + 1\right] \|h\|$$

$$K = \sum_{i=1}^{n} |A_i| + 1$$

نسمي $h = x - c$ ، $x = h + c$

$$\Rightarrow |f(x) - f(c)| < K\|x - c\|. \quad \#$$

المبرهنة: لتكن f معرفة بالشكل: $c \in D^{\circ},\ f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

فإذا كانت f قابلة للاشتقاق في c فإن f مستمرة في النقطة c

البرهان:

بما أن f قابلة للاشتقاق في c بحسب المبرهنة المساعدة.

$$\exists\ \delta_1, K>0,\ \|x - c\|<\delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(c)| < K\|x - c\|$$

تعريف الاستمرار

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \|x - c\|<\delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

نأخذ يوجد $\delta = \min(\delta_1, \frac{\varepsilon}{K})$ ، $\delta \le \delta_1$

إذا كان $\|x - c\| < \delta \Rightarrow \|x - c\| < \delta_1$

$\delta \le \frac{\varepsilon}{K}$

$$|f(x) - f(c)| < K\|x - c\| < K\delta \le K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

$|f(x) - f(c)| < \varepsilon \Rightarrow$ f مستمرة في (c)

مثال معاكس: لإثبات أنه ليس بالضرورة العكس صحيح [اثبات إذا كان مستمر ليس بالضرورة قابل للاشتقاق]

ادرس الاستمرار وقابلية الاشتقاق.

العكس ليس صحيح

خطأ

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto |x| = \begin{cases} x & x \ge 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$-x \qquad x<0$ / /

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = 0 , \quad \lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = 0 , \quad f(0) = 0$$

لـ f مستمر عند النقطة 0.

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$

$\Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق عند 0. (لأنه لابد من النهايتين اليمنى واليسرى متساويتين حتى يكون ~~مستمر~~ قابل للاشتقاق).

مثال: ادرس الاستمرار وقابلية الاشتقاق:

$$f : R^2 \longrightarrow R$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & y = 0 \\ \frac{x}{y} & y \neq 0 \end{cases}$$

لو كان مستمر

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0 : \|(x,y) - (0,0)\| < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$$

لو أخذنا $(x,y) = \left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)$

$$\|(x,y) - (0,0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta^2}{4}} = \sqrt{\frac{\delta^2}{2}} < \delta .$$

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} > 0$$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}} \right| = 1 > \frac{1}{2}$$

$$\forall \delta > 0 , \exists \varepsilon = \frac{1}{2} > 0 , \|(x,y)\| < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - f(0,0)| > \varepsilon$$

f غير مستمر، غير قابل للاشتقاق.

$c=(1,1,\ldots,1)$

حل الوظيفة:

$x-c=(x_1-1,\ x_2-1,\ \ldots,\ x_n-1)$

$\|x\|^{2r}=\|(x_1,x_2,\ldots x_n)\|^{2r}=\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\right)^{2r}$

$\|x\|^{2r}=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^r$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}(c)=$

$\frac{\partial F}{\partial x_1}(c)=r(2x_1)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{r-1}$ $\qquad \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ مرة}}$

$1\cdot n=n$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(1,1,\ldots,1)=2r\,n^{r-1}$

بنفس الطريقة

$\frac{\partial f}{\partial x_2}(1,1,\ldots,1)=2r\,n^{r-1}$

$d_c f(x_1-1,\ x_2-1,\ldots x_n-1)=(x_1-1)2r\,n^{r-1}+(x_2-1)2r\,n^{r-1}$
$+\cdots+(x_n-1)2r\,n^{r-1}$

$=2r\,n^{r-1}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i-n\right].$

$f: R^3 \longrightarrow R$

$f(x,y,z)=e^{-(x+y+z)}$ $\qquad c(0,0,0)$

$(x-c)=(x-0,\ y-0,\ z-0)=(x,y,z)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=-e^{-(x+y+z)}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)=-1$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)=-1$

$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)=-1,$ $\qquad d_c f(x,y,z)=-x-y-z$