السنة: الثانية / القسم: رياضيات / المادة: تحليل (٤)

المحاضرة: الرابعة / الدكتورة: هدى الشماط التاريخ: ١٨/ ٣/ ٢٠١٨

إثبات أن الفضاء ليس فضاء نظيم:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}$$

1) $d(x+z, y+z) = d(x,y)$

2) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$

$$L_1 = d(\alpha x, \alpha y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\alpha x_i - \alpha y_i|}{1+|\alpha x_i - \alpha y_i|}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\alpha||x_i-y_i|}{1+|\alpha||x_i-y_i|}$$

$$L_2 = |\alpha| d(x,y) = |\alpha| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}$$

$L_1 \neq L_2 \Rightarrow$ (S,d) غير فضاء نظيم

الفضاء الإقليدي ذو البعد n:

هو المجموعة $\mathbb{R}^n$ المزودة بعمليتي الجمع والضرب

$y = (y_1, \dots, y_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$x+y = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$

$\alpha \cdot x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$

والجداء الداخلي:

$\langle x,y \rangle = \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle$

$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$\Rightarrow \|x\| = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2)^{\frac{1}{2}}$

وبدالة المسافة:

$$d(x,y) = \|x - y\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

إذن $\mathbb{R}^n$ فضاء منظم وحيد داخلي ومتري:

تذكرة ببعض المفاهيم التبولوجية على الفضاء $\mathbb{R}^n$:

١- الكرة المفتوحة في $\mathbb{R}^n$:

ندعو المجموعة:

$$N(x_0, \varepsilon) = \{x : x \in \mathbb{R}^n, d(x, x_0) = \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

بالكرة المفتوحة التي مركزها x_0 ونصف قطرها ε.

- في الفضاء الحقيقي $\mathbb{R}$ الكرة المفتوحة تمثل بالمجال المفتوح.

$$]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$$

أما في $\mathbb{R}^2$ تمثل الكرة المفتوحة القرص الدائري عدا المحيط

أي مجموعة النقاط الواقعة داخل الدائرة عدا المحيط.

أما في $\mathbb{R}^3$ تمثل كرة.

٢- الكرة المغلقة:

هي المجموعة:

$$B(x_0, \varepsilon) = \{x : x \in \mathbb{R}^n, d(x, x_0) = \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$$

وتمثل في $\mathbb{R}$ المجال المغلق:

$$[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$$

أما في $\mathbb{R}^2$ فتمثل القرص الدائري مع المحيط.

كل كرة مفتوحة محتواة في الكرة المغلقة إذا كان لها نفس نصف القطر.

$$N(x_0, \varepsilon) \subset B(x_0, \varepsilon)$$

٣- تعريف:

جوار نقطة في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$:

لتكن x_0 نقطة ما من $\mathbb{R}^n$ نقول عن $U \subseteq \mathbb{R}^n$ أنه جوار
للنقطة x_0 إذا وجدت كرة مفتوحة مركزها النقطة x_0
محتواة في U

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ جوار لـ x_0 $\Leftrightarrow \exists N(x_0, \varepsilon) \subseteq U$

٤- تعريف المجموعة المفتوحة:

نقول عن مجموعة جزئية $U \subseteq \mathbb{R}^n$ أنها مفتوحة في $\mathbb{R}^n$
إذا وجد لكل عنصر x من U كرة مفتوحة مركزها x
ومحتواة في U.

$$\forall x \in U ; \exists N(x, \varepsilon_x) \subseteq U$$

حيث ε_x خاص به.

ملاحظة: كل مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}^n$ وتحوي النقطة x
تسمى جواراً للنقطة x في $\mathbb{R}^n$.

٥- المجموعة المغلقة:

نقول عن مجموعة جزئية $U \subseteq \mathbb{R}^n$ أنها مغلقة في $\mathbb{R}^n$
إذا وجدت x من U بحيث:

$$\forall \varepsilon > 0 , N(x, \varepsilon) \nsubseteq U$$

أي يوجد عنصر من الكرة التي مركزها x ونصف قطرها ε
غير محتواة في المجموعة U.

٦- المجموعة المحدودة:

نقول عن مجموعة جزئية $M \subseteq \mathbb{R}^n$ أنها محدودة إذا وفقط
إذا كان قطرها محدوداً أي لا يساوي ∞
ويكون المجموعة غير محدودة إذا وفقط إذا كان قطرها
غير محدود
أي يساوي ∞

بتعريفها مكانياً :
يوجد كرة مفتوحة مركزها x_0 ونصف قطرها K
والتي تحوي المجموعة M.

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ محدودة $\Leftrightarrow$ $\exists\, N(x_0, k) \supseteq M$

انتهت المحاضرة.