المحاضرة الحادية عشرة

١/٤/٢٠١٤

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists P_\varepsilon \text{ of } [a,b] : P \supset P_\varepsilon \Longrightarrow |S(f,P) - A| < \varepsilon$$

$x < x_2$

ونرمز لـ A بـ $\int_a^b f(x)\,dx$

مثال (٢): بين أن الدالة المعرفة على $[0,1]$ كما يلي غير محددة:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$$

$$S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k$$

$$P = \{0 = x_0 \le x_1 \le x_2 < \dots \le x_{n-1} \le x_n = 1\}$$

$t_1 \quad t_2 \quad t_{n-1} \quad t_n$

$$t_k \in Q \Longrightarrow S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})$$

$$= \cancel{x_1} - x_0 + \cancel{x_2} - \cancel{x_1} + \cancel{x_3} - \cancel{x_2} + \dots \; x_n - \cancel{x_{n-1}} = 1 - 0 = 1$$

$$t_k \notin Q = S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0$$

انتهت المحاضرة.

١/٤/٢٠١٤

المحاضرة الحادية عشرة

الخواص الأساسية للتكامل المحدد

تعريف التكامل وفق المبان: اذا كانت f دالة حقيقية معرفة ومحدودة على $[a,b]$ عندئذ نقول عن f أنها محددة اذا وجد $A \in R$ بحيث

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k = A$$

حيث نرمز لـ A بـ $\int_a^b f(x)\,dx$

$\Delta x = \max \Delta x_k \qquad : t_k \in [x_{k-1}, x_k]$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \qquad , P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$

بطريقة ثانية:

$\forall \epsilon > 0 , \exists P_\epsilon : P \supset P_\epsilon \Longrightarrow$

$[a,b]$ $\Delta P \leq \Delta P_\epsilon$

$|\sum (f,P) - A| < \epsilon$

حيث نرمز لـ A بـ $\int_a^b f(x)\,dx$

$\sum (f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k$

نظرية:

اذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ فإنها تكاملية على $[a,b]$ وفق البيان.

- خواص التكامل المحدد:

$a \leq b$

1: $\int_a^b \alpha\,dx = \alpha(b-a) : \alpha \in \mathbb{R}$

2: $\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$

3: $\int_a^b (f \mp g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \mp \int_a^b g(x)\,dx$

4: $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

$x \in [a,b]$

5: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$

$m = \min f(x)$, $M = \max f(x)$

$a \leq x \leq b$ $a \leq x \leq b$

6: نظرية القيمة الوسطى. اذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ عندئذ توجد $c \in [a,b]$ بحيث يحقق ما يلي:

$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

7: نظرية القيمة الوسطى العامة لدالتين: اذا كانت f, g دالتين مستمرتين على مجال $[a,b]$، وكانت الدالة $g(x)$ لا تغير اشارتها على المجال $[a,b]$ عندئذ توجد $c \in [a,b]$ بحيث تحقق

$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$

8: $m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx$

$m = \min f(x)$, $M = \max f(x)$

$a \leq x \leq b$ $a \leq x \leq b$

9: اذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ و $c \in]a,b[$ فإن:

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

10: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

11: $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx : b \geq a$.

12) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

13) اذا كانت f دالة مستمرة في $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

حيث $F(x)$ التابع الأصلي لـ $f(x)$

$F'(x) = f(x)$

14) f دالة زوجية $f(-x)=f(x)$ } $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

15) f دالة فردية $f(-x)=-f(x)$ } $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

16) النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل: اذا كانت الدالة f مستمرة في المجال $[a,b]$ واذا وجد $F(x)$ بحيث

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad x\in[a,b]$$

عندئذ يكون $F(x)$ دالة قابلة للاشتقاق بحيث

$F'(x)=f(x)$

أمثلة: أحسب التكاملات التالية:

$I_1 = \int_{-1}^{2} x.\sin x^2\,dx$

$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$

$I_3 = \int_0^1 x e^{-x}\,dx$

$I_4 = \int_1^3 x^3\sqrt{x^2-1}\,dx.$

$I_5 = \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos(\ln(x))\,dx$

$I_6 = \int_{-2}^{2} |x|\,dx$

$I_7 = \int_0^5 |2x-1|\,dx$

$I_8 = \int_{-a}^{a} (\sin 3x\cos x + \sin x\cos x)\,dx$

$I_9 = \int_0^{10} \frac{dx}{x+5}$

$I_{10} = \int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2+1}$

$I_{11} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-9}$

أثبت أن:

$I_{12}: \frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{2}$

أفكار الحل:

I_1: بتغيير المتحول ونقوم بتغيير حدود التكامل $x^2=t$

أما بالتجزئة لا تتغير حدود التكامل

I_2: تغيير متحول $t=\tan\frac{x}{2}$

I_3: تكامل بالتجزئة

I_4: تغيير متحول $x^2-1=t$

و $x^3 = x(x^2+1-1)$

I_5: تغيير متحول $t=\ln x$

I_6: حسب الخاصية رقم 14.

I_7: ندرس الإشارة فينتج $(\frac{1}{2},5),(0,\frac{1}{2})$

$I_8 = 0$ لأن التابع فردي

$I_9 =$ حل فوري $\ln 3$

I_{10}: تابع زوجي $= 2\int_0^2 \frac{dx}{x^2+1}$

arctan

/ /

$$I_{11} = \int_0^2 \frac{dx}{x^2-4} \leftarrow \quad : \quad \int \frac{dx}{x^2-a} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$$

حل المشكلة التالية: I_{12} : $m\int_0^1 x\,dx \leq \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}} \leq M\int_0^1 x\,dx$

ان $g(x)$ هي x و $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ { أكبر ما يمكن 1 ، أصغر ما يمكن $\frac{1}{\sqrt{2}}$

الحل:

$$I_{12} = m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx$$

ان f و g مستمرين في $[a,b]$ ، $g(x)$ لها اشارة واحدة في $[a,b]$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ، $x+1>0 \Rightarrow x>-1$ في المجال $[0,1]$

$g(x) = x$

ان f,g دالتين مستمرتين في $[0,1]$ ، $g(x)=x \leftarrow g'(x)=1$ لها اشارة واحدة موجبة في المجال $[0,1]$

$$m\int_0^1 x\,dx \leq \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx \leq M\int_0^1 x\,dx$$

$$\frac{m}{2} \leq \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx \leq \frac{M}{2}$$

دراسة الاشارة أو ندرس f

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow f' = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{(x+1)} \Longrightarrow f(x) = \frac{1}{2(x+1)^{3/2}}$$

x	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		—	—	
$f(x)$		1	$\searrow \frac{1}{\sqrt{2}}$	

$\Rightarrow M=1$ ، $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$

نعوض القيمتين في المتباينة ونتج المطلوب

انتهت الحلقة