المحاضرة الخامسة عشرة
الخميس ٨/٥/٢٠١٤م
الموضوع : تطبيقات التكامل المحدد.

① حساب مساحات الأشكال المستوية /
② حساب حجوم المجسمات الدورانية /
③ حساب مساحات سطوح المجسمات الدورانية /
④ حساب أطوال المنحنيات /

قطبيا	وسيطيا	ديكارتيا
$r = f(\theta)$	$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$	$\begin{cases} y = f(x) \to [a,b] \\ \text{والمشتقة مستمرة} \end{cases}$
$S = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta$	$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\, x'(t)\, dt$	$S = \int_a^b y\, dx$
	$V = \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\, x'(t)\, dt$	$V = \pi \int_a^b y^2\, dx$
$\sigma = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} r\sin\theta \sqrt{r^2 + r_\theta'^2}\, d\theta$	$\sigma = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt$	$\sigma = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\, dx$
$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta$	$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt$	$l = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\, dx$

أمثلة متنوعة : ① المستقيم :
إذا كان لدينا المستقيم $4x - 3y = 0$. والمطلوب
① حساب المساحة المحصورة بين المستقيم المعرف بـ $x = 3$ والمحور ox
② حجم المتولد من دوران المساحة السابقة حول ox

③ احسب مساحة المنطقة المولدة من دوران المستقيم $4x-3y=0$ والمستقيم $x=3$ حول المحور ox .

④ تأكد من القيم السابقة / المساحة / الحجم / مساحة السطح من دساتير درستها في المرحلة الثانوية .

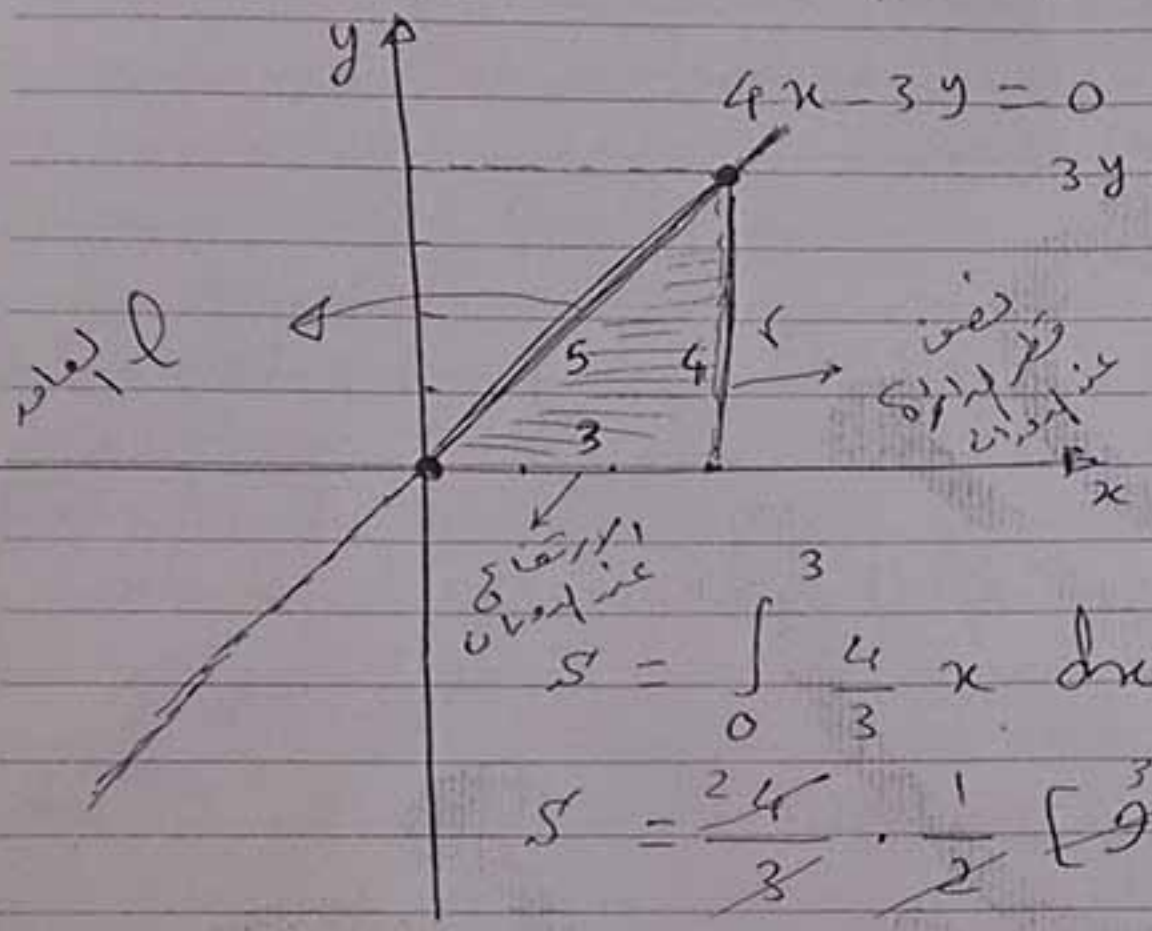
الحل ① رسم المستقيم $4x-3y=0$

$3y=4x$

$x=0 \Rightarrow y=0$

$x=3 \Rightarrow y=4$

$$y=\frac{4}{3}x$$



$$S=\int_0^3 \frac{4}{3}x\,dx=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^3$$

$$S=\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\left[\cancel{9}-0\right]=6$$ وحدة مربعة

يمكن التأكد من ذلك بحساب مساحة مثلث $\frac{\text{القاعدة}\times\text{الارتفاع}}{2}$

/ الطلب الرابع / $S=\frac{3\cdot 4}{2}=\frac{12}{2}=6$.

② الحجم :

$$V=\int_0^3 \pi y^2\,dx=\pi\int_0^3 \frac{16}{9}x^2\,dx$$

$$V=\pi\cdot\frac{16}{9}\cdot\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^3=\pi\cdot\frac{16}{\cancel{9}}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}\left[(3)^3-0\right]$$

$V=16\pi$ وحدة مكعبة

التأكد من ذلك حساب حجم المخروط

$V=\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع $=\frac{1}{\cancel{3}}(\pi(4)^2)(\cancel{3})=16\pi$

$$\sigma = 2\pi \int_0^3 \frac{4}{3}x\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}\,dx$$

$$\sigma = 2\pi\,\frac{4}{3}\sqrt{\frac{9+16}{9}}\int_0^3 x\,dx$$

$$\sigma = 2\pi\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^3$$

$$\sigma = \pi\cdot\frac{4\cdot5}{3}\left[9-0\right] = 20\pi$$ وحدة مربعة

التأكد من القاعدة الجانبية للمخروط.

$$\sigma = \pi\cdot r\cdot l$$

l حسب فيثاغورث $l=5$

$$= \pi\cdot(4)\cdot(5) = 20\pi.$$

وهكذا يكون الطلب الرابع قد تم حله أضاء ل كل طلب.

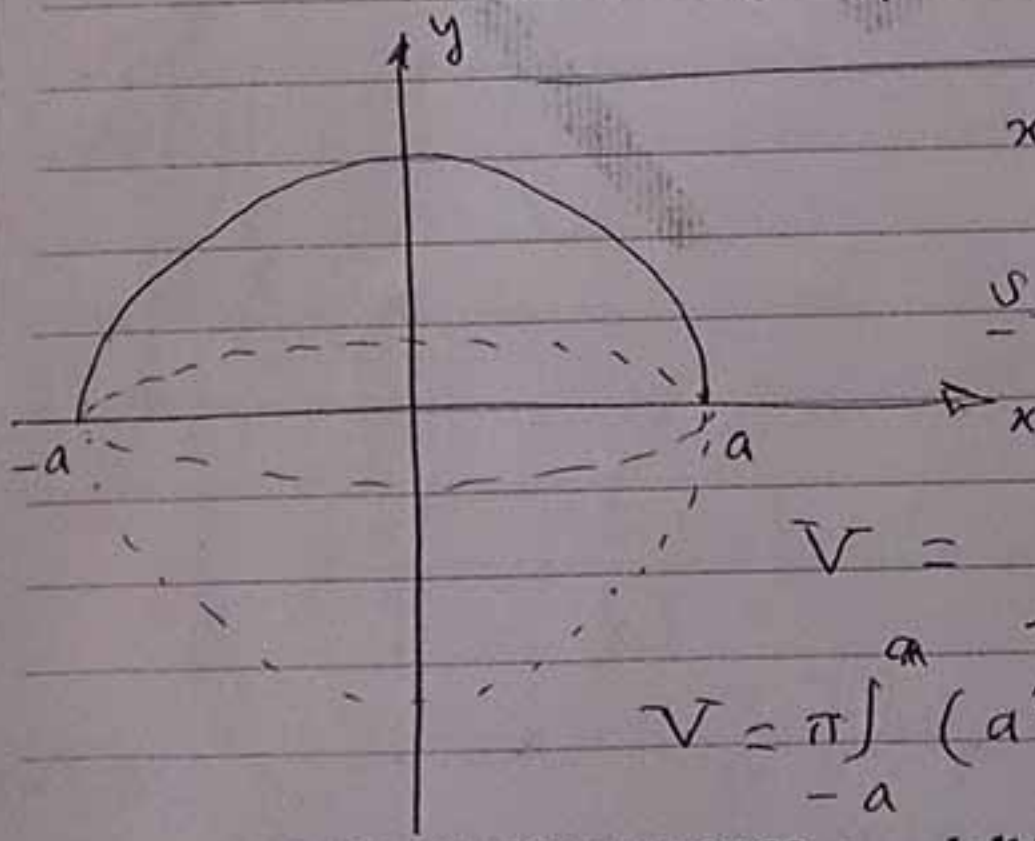
الدائرة:

إذا كانت لدينا الدائرة المعرفة كالتالي $x^2+y^2=a^2$ والمطلوب:

① احسب الحجم المتولد من دوران النصف العلوي من الدائرة حول المحور $x'x$.

② احسب مساحة السطح الجانبي المتولد من دوران نصف الدائرة العلوي حول المحور $x'x$.

③ احسب محيط الدائرة l.



① $x^2+y^2=a^2 \Rightarrow$

$$y^2 = a^2 - x^2$$

الجزء العلوي $y = \sqrt{a^2-x^2}$

$$V = \int_{-a}^{a} \pi y^2\,dx$$

$$V = \pi\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx = 2\pi\int_0^a(a^2-x^2)\,dx$$

$$V = 2\pi \int_0^a (a^2 - x^2)\,dx = 2\pi \left[a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^a$$

$$= 2\pi \left[a^3 - \frac{1}{3} a^3 \right] = 2\pi \cdot \frac{2}{3} a^3 = \frac{4}{3} a^3$$

حجم نصف الكرة.

$$\sigma = 2\pi \int_{-a}^{a} y \sqrt{1 + y_1^2}\,dx$$

$x^2 + y^2 = a^2$ نشتق ضمنياً

$$2x + 2yy' = 0$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

$$\sigma = 2\pi \int_{-a}^{a} y \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}\,dx$$

$$= 2\pi \int_{-a}^{a} y \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2}}\,dx$$

$$= 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{x^2 + y^2}\,dx = 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2}\,dx$$

$$= 2\pi a \int_{-a}^{a} dx = 2\pi a \left[x \right]_{-a}^{a}$$

$$= 2\pi a \left[a - (-a) \right] = 2\pi a (2a) = 4\pi a^2$$

وهو مساحة سطح الكرة.

$$l = 2\int_{-a}^{a} \sqrt{1 + y_1^2}\,dx$$

طول محيط الدائرة.

بالتعويض

$$l = 2 \int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2}}\,dx$$

$$l = 2 \int_{-a}^{a} \frac{a}{y}\,dx = 2a \int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 4a \int_{0}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

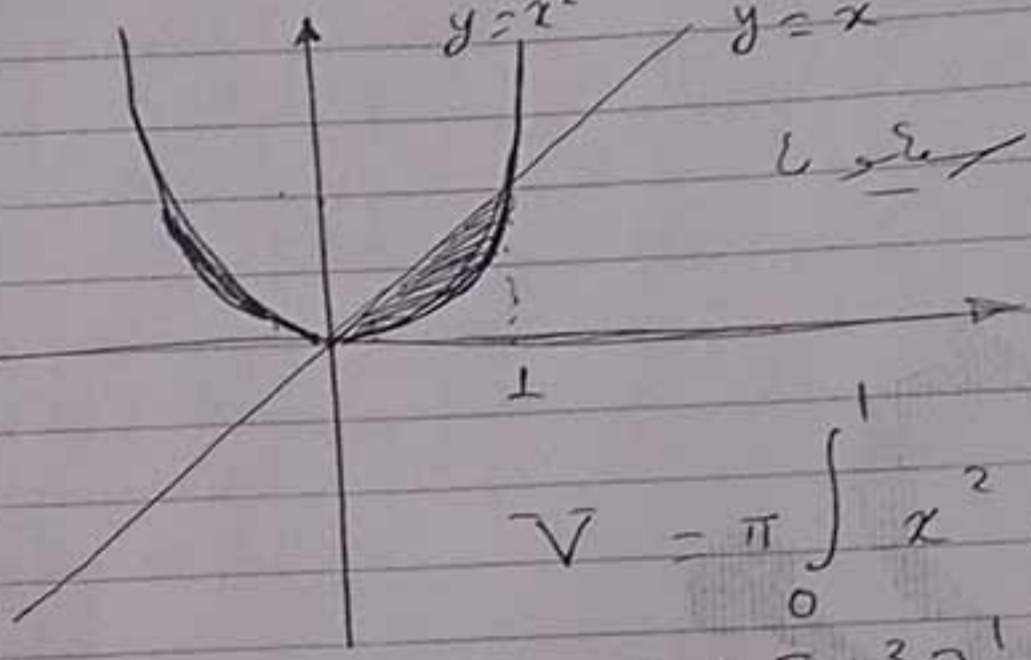
$$= 4a \left[\arcsin \frac{x}{a} \right]_0^a = 4a \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] = 2\pi a$$

محيط الدائرة.

«PLUS» لخدمات العلوم - حرم كلية العلوم - ت: 0112151436 / 0944879460

(٣) اوجد حجم المتولد عن دوران المساحة المحصورة بين $y=x^2$ ، $y=x$ حول المحور ox .

الحل:



واضح أن المطلوب

$$x^2 = x \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$
$$x^2 - x = 0$$

$$V = \pi \int_0^1 x^2\,dx - \pi \int_0^1 x^4\,dx$$

$$V = \pi \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^1 - \pi \frac{1}{5}\left[x^5\right]_0^1$$

$$V = \pi \frac{1}{3}[1-0] - \pi \frac{1}{5}[1-0] = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5}$$

$$V = \frac{2}{15}\pi$$ وحدة مكعبة / وحدة أخرى

(٤) السيكلوئيد :

إذا كانت معادلات السيكلوئيد معطاة وسيطياً

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

المطلوب :

① حساب المساحة المحصورة بين المنحنى والمحور ox فى الدورة الواحدة.

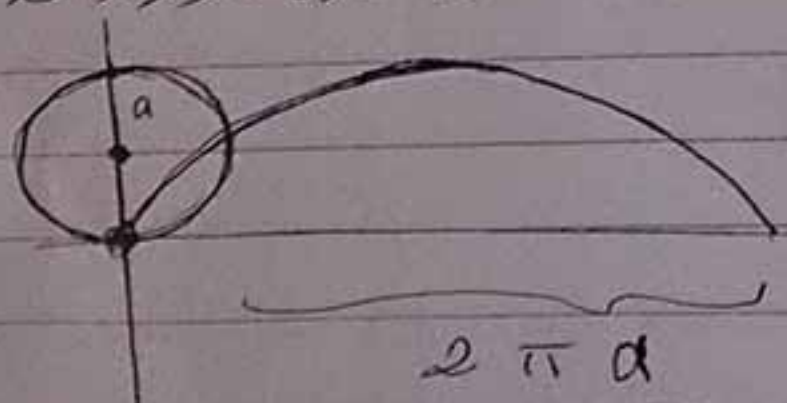
« حلول سابقاً »

② حساب الحجم المتولد من دوران المنحنى حول المحور $V_{[ox]}$

③ = مساحة السطح المتولد من دوران المنحنى حول المحور $S_{.ox}$

④ = طول المنحنى L . وذلك خلال دورة واحدة .

الحل: منحنى السيكلوئيد له شكل



$$V = \pi \int_0^{2\pi} y^2(t)\, x'(t)\, dt \qquad ©$$

$$V = \pi \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 a(1-\cos t)\, dt$$

$$V = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3\, dt$$

$$V = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\, dt$$

$$V = 5\pi^2 a^3$$. يمكن ايجاد المساحة من العلاقة التالية

$$\sigma = 2\pi \int_0^{2\pi} y(t) \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt$$

$$y = a(1-\cos t) \quad , \quad x = a(t - \sin t)$$

$$y_t' = a\sin t \quad , \quad x_t' = a(1-\cos t)$$

$$\sigma = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1-\cos t) \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2(1-\cos t)^2}\, dt$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t) \sqrt{\sin^2 t + 1 - 2\cos t + \cos^2 t}\, dt$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{\pi} (1-\cos t) \sqrt{2(1-\cos t)}\, dt$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} 2\sin^2 \frac{t}{2} \sqrt{4\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt$$

$$\sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1-\cos t}{2}$$

$$= 6\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \left|\sin \frac{t}{2}\right| dt \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{t}{2} \geq 0 \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

$$= 6\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2}\, dt$$ ، والنتيجة هي :

$$\sigma = \frac{64}{3}\pi a^2 .$$

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$$

$$x' = a(1-\cos t) \quad , \quad y' = a\sin t$$

$$x'^2 + y'^2 = a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t$$

$$x'^2 + y'^2 = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)$$

$$x'^2 + y'^2 = a^2(2 - 2\cos t) = 2a^2(1-\cos t)$$

$$x'^2 + y'^2 = 4a^2 \sin^2\frac{t}{2}$$

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}\, dt$$

$$\ell = 2a\int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right| dt \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sin\frac{t}{2} \geq 0 \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{array} \right.$$

$$\ell = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt$$

$$\ell = 2a\left\{-2\left[\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}\right\} = -4a[-1-1] = 8a$$

٥ الاستروئيد (الستروئيد) .

إذا كان منحنى الاستروئيد معطى بالشكل الوسيطي

$$x = a\cos^3 t$$
$$y = a\sin^3 t \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

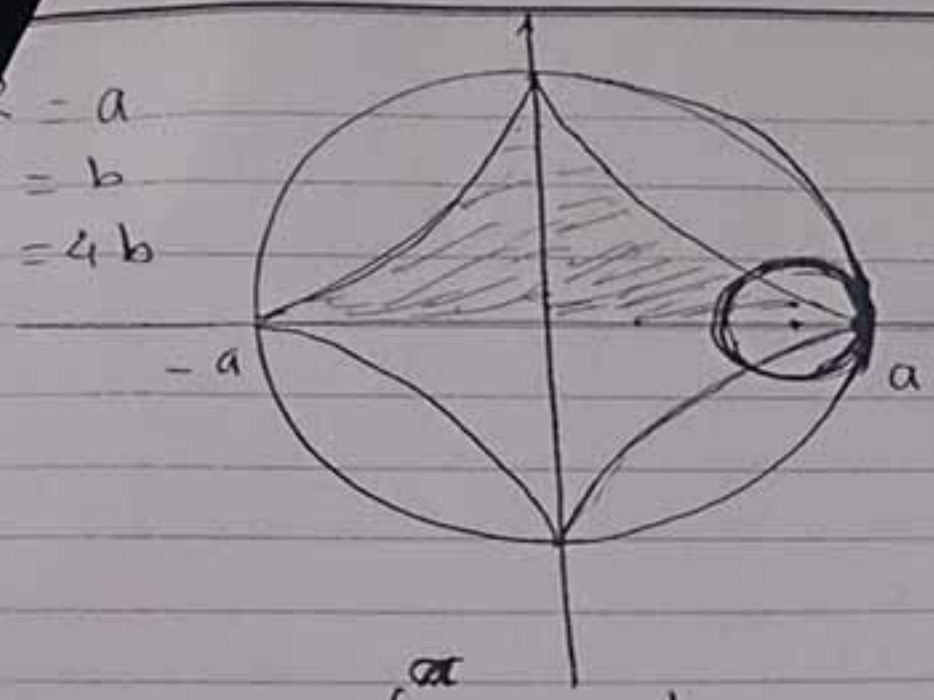
فطلوب:

① حساب الحجم المتولد من دوران النصف العلوي للمنحنى حول $x'x$.

② مساحة السطح المتولد من دوران النصف $= \sigma$.

③ طول المنحنى ℓ.

$a = a$
$r = b$
$a = 4b$



$$x = a\cos^3 t$$
$$y = a\sin^3 t$$

$x = a \Rightarrow t = 0$

$x = -a \Rightarrow t = \pi$

$t = \frac{\pi}{2} \begin{cases} x = 0 \\ y = a \end{cases}$

$$V = \pi \int_{-a}^{a} y^2\,dx = \pi \int_{\pi}^{0} a^2 \sin^6 t(-3a\cos^2 t \sin t)\,dt$$

$$= -3\pi a^3 \int_{\pi}^{0} \sin^6 t\,(1-\sin^2 t)\sin t\,dt$$

$$= 3\pi a^3 \int_{0}^{\pi} (\sin^7 t - \sin^9 t)\,dt$$

يمكن للطالب متابعة البرين.

$$\sigma = 2\left[2\pi \int_{0}^{a} y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt\right] = 4\pi \int_{0}^{\pi/2} y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

$$x'^2 + y'^2 = (-3a\cos^2 t \sin t)^2 + (3a\sin^2 t \cos t)$$

$$x'^2 + y'^2 = 9a^2\cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t$$

$$x'^2 + y'^2 = 9a^2\cos^2 t \sin^2 t\,[\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1}]$$

$$x'^2 + y'^2 = 9a^2\cos^2 t \sin^2 t$$

$$\sigma = 4\pi \int_{0}^{\pi/2} a\sin^3 t\; 3a\cos t \sin t\,dt = \frac{12}{5}\pi a^2$$

$$\ell = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$$

$$\ell = 4\int_0^{\pi/2} \overset{H}{3a\sin t}\ \overset{H'}{\cos t}\, dt$$

$$\ell = 12a\int_0^{\pi/2} \sin t \cos t\, dt = 12a\,\frac{1}{2}\left[\sin^2 t\right]_0^{\pi/2}$$

$$\ell = 6a[1-0] = 6a$$

---

٢) الكاردیوئید:

إذا كان منحنى الكاردیوئید مثلاً قطبياً بالشكل $r = a(1+\cos\theta)$ حيث $0 \le \theta \le 2\pi$

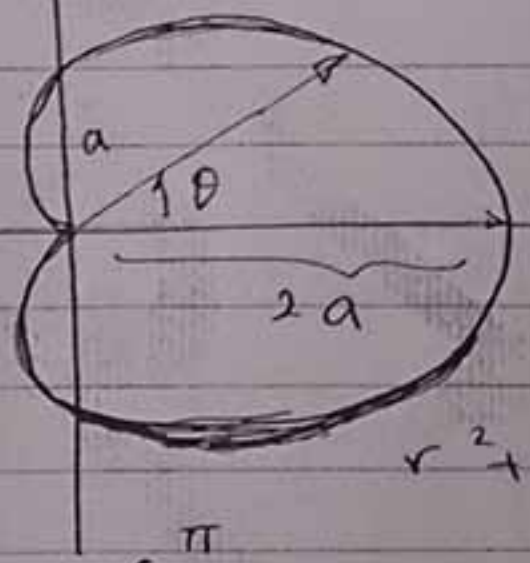
والمطلوب:

① حساب مساحة السطح المتولد من دوران النصف العلوي للمنحنى حول المحور $x'x$

② حساب طول المنحنى ℓ

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$



$\theta = 0 \Rightarrow$ (من 1)

$r = a(1+1) = 2a$

$r^2 = a^2(1+\cos\theta)^2$

$r'^2 = a^2\sin^2 t$

$r^2 + r'^2 = a^2[2 + 2\cos\theta]$

$= 2a^2(1+\cos\theta) = 4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}$

$$\sigma = 2\pi\int_0^{\pi} r\sin\theta\sqrt{4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta$$

$\cos\frac{\theta}{2} \ge 0$

$0 \le \theta \le \pi$

$$= 4\pi a\int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\sin\theta\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta$$

$$= 4\pi a^2\int_0^{\pi} 2\cos^2\frac{\theta}{2}\ 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

«PLUS» لخدمات العلوم . حرم كلية العلوم .ت: 0112151436 / 0944879460

$$\sigma = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^1\frac{\theta}{2}\cos^4\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$\frac{\theta}{2} = t \Rightarrow \theta = 2t \Rightarrow d\theta = 2\,dt \qquad \begin{cases} \theta = 0 \Rightarrow t = 0 \\ \theta = \pi \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\sigma = 16\pi a^2 \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin t\,dt$$

$$\sigma = -32\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underset{u^n}{\cos^4 t}\,\underset{u'}{(-\sin t)}\,dt$$

$$= -32\pi a^2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left[\cos^5 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -32\pi a^2 \cdot \frac{1}{5}\left[0 - 1\right] = \frac{32}{5}\pi a^2$$

$$\ell = 2\int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta \qquad \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| = \cos\frac{\theta}{2} \quad (0 \le \theta \le \pi)$$

$$= 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$= 4a \cdot 2\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} = 8a\left[1 - 0\right] = 8a$$

الزمن