المحاضرة الحادية عشرة

تمرين: ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن $A \subset X$ ، $A \neq \phi, X$

أوجد: $\bar{A}$ ، A° ، A' في كل من الحالات التالية

(٢) τ هي التبولوجيا التافهة على X (٤)

$\tau = \{\phi, X\}$ هي التبولوجيا التافهة على X حيث X ، ϕ الوحيدتان المفتوحتان وكذلك هما الوحيدتان المغلقتان

$$A \neq \phi, X \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{A} = X \\ A^{\circ} = \phi \end{array} \right\} \Rightarrow b(A) = X \setminus \phi = X$$

لنوجد A' :

إذا كانت A وحيدة العنصر ولتكن $A = \{a\}$

من أجل كل $x \in X$

$$X \cap (A \setminus \{x\}) = X \cap (\{a\} \setminus \{x\})$$

لو كان $x = a$ فإن $x \notin \{a\}'$

" " فإن $x \neq a$ فإن $\{a\} = A \setminus \{x\}$ وبالتالي

$$X \cap (A \setminus \{x\}) \neq \phi$$

ومنه $x \in A'$ وبالتالي

$$\forall x \in \{a\}^c ; x \in \{a\}' \Rightarrow \{a\}^c \subset \{a\}'$$

وبما أن $a \notin \{a\}'$ فإن $\{a\}' = \{a\}^c$

إذا كان عدد عناصر A أكبر من (١) أي $|A| \geq 2$ فإن

$$1 \leq |A \setminus \{x\}| \quad , \forall x \in X$$

$$\Rightarrow X \cap (A \setminus \{x\}) \neq \phi \quad , \forall x \in X$$

$$\Rightarrow x \in A' \quad , \forall x \in X \Rightarrow A' = X$$

2- τ هي التبولوجيا المتقطعة على X ،

$$\tau = P(X) = \{B : B \subset X\}$$

لتكن $A \subset X$ ، $A \neq \phi, X$

$\bar{A} = A$ (لأنّ A مغلقة)

$A^\circ = A$ (لأنّ A مفتوحة)

$b(A) = \bar{A} \setminus A^\circ = A \setminus A = \phi$

لنوجد A':

من أجل كل $x \in X$ فإن $\{x\} \in \tau$ ، $x \in \{x\}$

$(\{x\} \cap A \setminus \{x\}) = \phi \Rightarrow x \notin A' \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow A' = \phi$

3- τ هي تبولوجيا زاريسكي على X اللامنتهية

$$\tau = \{\phi\} \cup \{B \subset X ; B^c \text{ منتهية}\}$$

$$A \neq X, \phi \Rightarrow \bar{A} = \begin{cases} A & ; A \text{ منتهية} \\ X & ; A \text{ غير منتهية} \end{cases}$$

X هي الوحيدة المغلقة والغير منتهية. بينما ϕ هي الوحيدة المفتوحة والمنتهية

$$A^\circ = \begin{cases} \phi & ; A \text{ منتهية} \\ A & ; A \in \tau \text{ غير منتهية} \\ \phi & ; A \notin \tau \text{ ،، ،،} \end{cases}$$

تبيان أن $A^\circ = \phi$ عندما $\tau \not\ni A$ و A غير منتهية

نفرض جدلاً أنه توجد $\phi \neq B \in \tau$ ، $B \subset A \Rightarrow A^c \subset B^c$

لكن B^c منتهية وهذا يناقض كون A^c غير منتهية لأن $A \notin \tau$ وبذلك

$$A' = \phi$$

لنوجد A' في تبولوجيا زاريسكي:

نلاحظ أن كل مجموعة مفتوحة وليست خالية (بالنسبة لتبولوجيا زاريسكي وبالتالي متممها منتهية) متقاطع مع أي مجموعة غير منتهية بنقطة واحدة على الأقل

$$B \in \tau$$

$$B = X \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$$

لأنه لو كانت C مجموعة غير منتهية محقق:

$$B \cap C = \phi \Rightarrow C \subset B^c$$ "منتهية"

وهذا يناقض كون C غير منتهية

لنبرهن أن:

$$\forall A \subset X ;\ X, \phi \neq A \quad : A' = X$$

A غير منتهية

مهما يكن $x \in X$ فإن $A \setminus \{x\}$ غير منتهية

وبالتالي (حسب القاعدة السابقة) من أجل كل مجموعة B تحوي x فإن:

$$B \cap (A \setminus \{x\}) \neq \phi$$

$$\Rightarrow x \in A' , \forall x \in X \Rightarrow A' = X$$

وذلك في حال A غير منتهية

لو كانت A منتهية فإن $A' = \phi$ ولنبرهن ذلك

$\boxed{\text{تذكرة: } (\exists B \in \tau : x \in B \wedge B \cap (A \setminus \{x\}) = \phi) \Leftrightarrow x \in A'}$

من أجل كل $X \ni x$

$$(A \cap \{x\}^c)^c = A^c \cup \{x\} \in \tau$$

إن $A^c \cup \{x\} \in \tau$ لأن $A \cap \{x\}^c$ منتهية وهي تمثل متممها

وبالتالي من أجل كل $X \ni x$ توجد

$A^c \cup \{x\} \in \tau$ وتحقق

$$A^c \cup \{x\} \cap (A \setminus \{x\}) = \phi$$

$$\Longrightarrow x \notin A' , \forall x \in X \Longrightarrow A' = \phi$$

تمرين: لنزود $\mathbb{R}$ بالتبولوجيا التالية:

$$\tau = \{\phi, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[: a \in \mathbb{R}\}$$

والمطلوب

① أوجد جميع المغلقات في τ

$$\{\phi, \mathbb{R}\} ,]-\infty, a] : a \in \mathbb{R}$$

② أوجد: $\bar{A}, A^\circ, A'$ حيث $A = \{1, 2, 7\}$

$$\bar{A} =]-\infty, 7]$$

$$A^\circ = \phi , \quad A' =]-\infty, 7[$$

③ أوجد $\bar{A}, A^\circ, A'$ حيث

$$A =]1, 2[$$

انتهت المحاضرة الحادية عشرة