الموضوع: حل تمارين عن تكامل ستيلتجس

1- التمرين الأول: نعرف:

$$g(x) = \begin{cases} x+2 & ; \quad -2 \le x \le -1 \\ 2 & ; \quad -1 < x < 2 \\ x+3 & ; \quad 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

وليكن لدينا $f(x) = x$

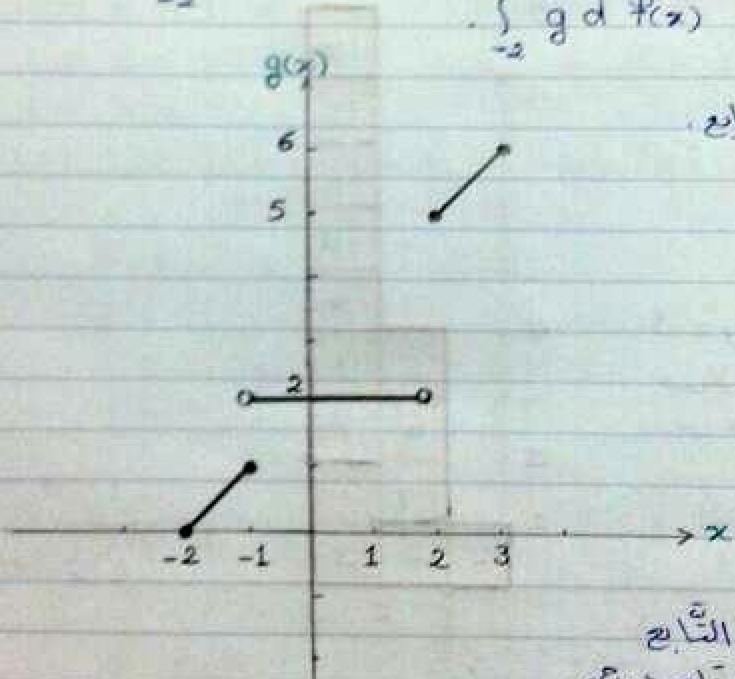
والمطلوب: أثبت أن:

$$I = (S)\int_{-2}^{3} x \, dg(x) = 6$$

ثم احسب $\int_{-2}^{3} g \, d f(x)$.

الحل:

لنرسم التابع:



نلاحظ أن التابع $g(x)$ ليس تابع درجي

كما أنه لدينا نقطتين انقطاع هما: $c_1 = -1 \ , \ c_2 = 2$

لحساب التكامل المعطى لابد لنا من التعويض في القانون:

$$I = \int_a^b f \, dg = \int_a^b f \cdot g' \, dx + f(a)[g(a+0) - g(a)] + \sum_{k=1}^{n} f(c_k) g_k + f(b)[g(b) - g(b-0)]$$

بعض الملاحظات التي يجب أخذها بعين الاعتبار قبل البدء بالحل:

1- لو كان التابع $g(x)$ تابع درجي [يحقق في هذه الحالة: جميع فروعه عبارة عن توابع ثابتة على مجالاتها المفتوحة] لكان المقدار : $\int_a^b f \cdot g' \, dx$ مساوياً للصفر ، وإن لم تكن الدالة درجية فيلزم حساب هذا المقدار.

2- إن لم تكن النقطتين a و b نقطتي انقطاع فإن التابع $g(x)$ سيكون حكماً مستمر عند هاتين القيمتين وبالتالي فإن كل من المقدارين $[g(a+0)-g(a)]$ و $[g(b)-g(b-0)]$ سيساوي الصفر (حسب تعريف الاستمرار في نقطة)

3- في حال كانت النقطتان a و b نقطتي انقطاع لزم حساب كل من $[g(a+0)-g(a)]$ و $[g(b)-g(b-0)]$ ويجب التنويه في هذه الحالة إلى عدم تكرار القيمتين a و b كنقاط انقطاع أثناء حساب المجموع المتعلق بنقاط الانقطاع :

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, g_k$$

4- $$g_k = g(c_k+0) - g(c_k-0)$$

حيث c_k نقطة انقطاع للدالة g.

عودة للحل: بالتعويض في القانون السابق مع مراعاة الملاحظات السابقة نجد:

$$I = (S)\int_{-2}^{3} x \, dg(x) = (R)\int_{-2}^{-1} x\,(1)\,dx + (R)\int_{-1}^{2} x\,(0)\,dx + (R)\int_{2}^{3} x\,(1)\,dx + f(-2)\left[g(-2+0) - g(-2)\right] +$$

هذا المقدار يساوي الصفر لأن النقطة (-2) ليست نقطة انقطاع للدالة $g(x)$ وبالتالي $g(x)$ مستمر عندها حيث نلاحظ:

$$g(-2+0) = \lim_{x \to -2^+} g(x) = \lim_{x \to -2^+} (x+2) = 0 \quad \wedge \quad g(-2) = 0$$

$$+ f(-1)\left[g(-1+0)-g(-1-0)\right] + f(2)\left[g(2+0)-g(2-0)\right]$$

$$+ f(3)\left[g(3)-g(3-0)\right]$$

أيضاً هذا المقدار مساوي للصفر حيث النقطة (3) ليست نقطة انقطاع للدالة $g(x)$ أي $g(x)$ مستمر عندها أي:

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 3} g(x) = g(3-0) = \lim_{x \xrightarrow{<} 3} (x+3) = 6 \quad \wedge \quad g(3) = 6$$

$$\vec{I} = \frac{1}{2}\left[x^2\right]_{-2}^{-1} + 0 + \frac{1}{2}\left[x^2\right]_{2}^{3} + (-2)\left[0-0\right] +$$

$$(-1)\left[2-1\right] + 2\left[5-2\right] + 3\left[6-6\right]$$

$$= \frac{1}{2}(1-4) + \frac{1}{2}(9-4) + (-1) + 6$$

$$= \frac{-3}{2} + \frac{5}{2} - 1 + 6 = 6$$

ملاحظة:

$$g(-1+0) = \lim_{x \xrightarrow{>} -1} g(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} -1} 2 = 2$$

$$g(-1-0) = \lim_{x \xrightarrow{<} -1} g(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} -1} (x+2) = 1$$

ننظر إلى نهاية الصورة عندما x تسعى لعدد معين من اليمين أو من اليسار ملاحظة هذا الأمر من الرسم

- حساب المقدار: $\int_{-2}^{3} g\,df(x)$

نعلم أنّ: $\int_a^b f\,dg + \int_a^b g\,df = \left[f(x).g(x)\right]_a^b$

بالاستفادة من هذه الخاصة نجد:

$$\int_{-2}^{3} g\,df = [f(x).g(x)]_{-2}^{3} - \int_{-2}^{3} f\,dg$$

$$= f(3)\,g(3) - f(-2)\,g(-2) - 6 = 12$$

$\frac{2}{212}$ التمرين الثاني: نفرض:

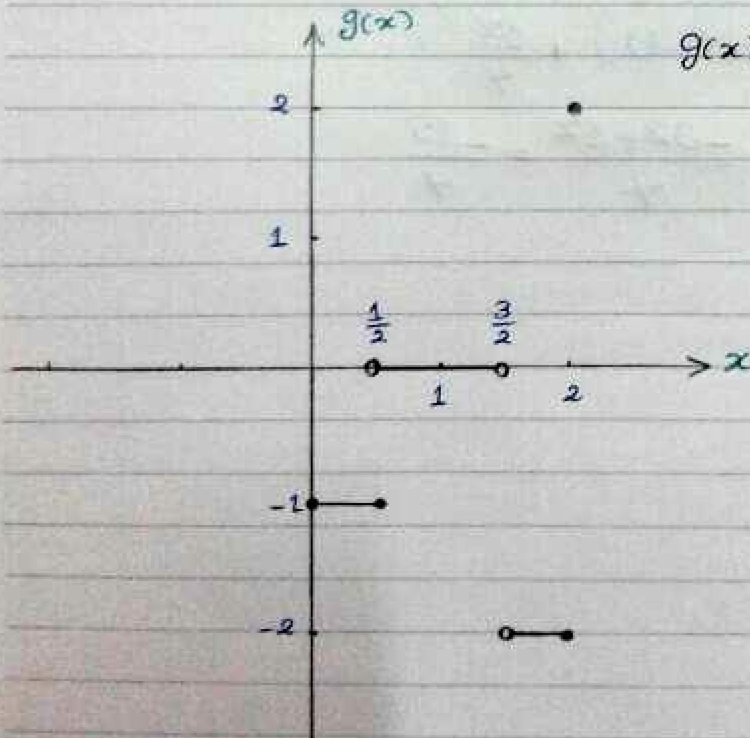
$$g(x) = \begin{cases} -1 & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\ 2 & x = \frac{3}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} < x \le 2 \end{cases}$$

ولكن: $f(x) = x^2$

والمطلوب: أثبت أن: $I = (S)\int_0^2 x^2\, d(g(x)) = \frac{-17}{4}$

ثم أوجد: $\int_0^2 g\,df$.

الحل: لنرسم التابع $g(x)$



نلاحظ أن التابع $g(x)$ هو تابع درجي حيث أن جميع فروعه عبارة عن توابع ثابتة

وبالتالي بتطبيق القانون :

$$I = (s)\int_0^2 x^2\,dg(x) = \sum_{k=1}^{2} f(c_k).g_k$$

$$= f(\tfrac{1}{2})\left[g(\tfrac{1}{2}+0) - g(\tfrac{1}{2}-0)\right] + f(\tfrac{3}{2}).$$

$$\left[g(\tfrac{3}{2}+0) - g(\tfrac{3}{2}-0)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[0-(-1)\right] + \frac{9}{4}\left[-2+(0)\right] = \frac{1}{4} - \frac{18}{4} = \frac{-17}{4}$$

$$\Rightarrow \int_0^2 g\,df = \left[f(x).g(x)\right]_0^2 - \int_0^2 f\,dg$$

$$= \left[f(2).g(2) - f(0).g(0)\right] - \left(\frac{-17}{4}\right)$$

$$= \left[(4).(-2) - (0)(-1)\right] + \frac{17}{4}$$

$$= -8 + \frac{17}{4} = \frac{-32+17}{4} = \frac{-15}{4}$$

انتهت المحاضرة الثانية عشرة