22/4/2014 الثلاثاء المحاضرة الثالثة عشر

تعريف: بفرض $a \in \mathbb{C}$ نقطة شاذة معزولة بالنسبة للتابع $f(z)$ وبفرض

$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n (z-a)^n$ (متسلسلة لورانت للتابع $f(z)$ عند النقطة a)،

عندئذٍ نسمّي a_{-1} براسب التابع $f(z)$ عند النقطة الشاذة a ونكتب:

$$\boxed{Res(f(z),a)=a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\,dz}$$

"حفظ"

حيث γ منحني دائري مركزه a

تمرين: احسب الرواسب للتوابع التالية:

1) $f(z)=\frac{\sin z}{z^4}$

الحل: نلاحظ أن التابع $f(z)=\frac{\sin z}{z^4}$ يكتب بالشكل:

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^4}=\frac{1}{z^4}\left[z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots\right]$$

$$=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{3!\,z}+\frac{1}{5!}z-\dots$$

ومنه:

$$Res(f(z),0)=-\frac{1}{6}$$

ملاحظة: 0 قطب من المرتبة الثالثة

a_{-1} = الراسب: هو أمثال أول حد من الجزء الرئيسي للمتسلسلة من الأدنى

ففي المثال السابق هي أمثال $\frac{1}{z}$

* طريقة ثانية:

$$Res(f(z),0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\sin z}{z^4}\,dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{2\pi i}{3!}\left[\sin z\right]'''_{z=0}=-\frac{1}{6}$$

2) $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$ عند النقطة $a=1$

الحل: نلاحظ أنّ :

$$f(z)=\frac{e^z}{(z-1)^2}=e\cdot\frac{e^{z-1}}{(z-1)^2}$$

$$=\frac{e}{(z-1)^2}\left[1+(z-1)+\frac{(z-1)^2}{2!}+\cdots\cdots\right]$$

$$=\frac{e}{(z-1)^2}+\frac{e}{z-1}+\frac{e}{2!}+\frac{e}{3!}(z-1)+\cdots\cdots$$

ومنه :

$$\operatorname{Res}(f(z),1)=e$$

* طريقة ثانية :

$$\operatorname{Res}(f(z),1)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{e^z}{(z-1)^2}\,dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\,2\pi i\,\left[e^z\right]'_{z=1}=e$$

3) $f(z)=\dfrac{3z-i}{z(z-i)}$; عند النقطة $a=i$

الحل: نلاحظ أنّ :

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{2}{z-i}$$

$$=\frac{1}{i}\,\frac{1}{1+\left(\frac{z-i}{i}\right)}+\frac{2}{z-i}$$

$$=\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{i}\right)^n+\frac{2}{z-i}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f(z),i)=2$$

يمثل العدد 2 أمثال أول حد في الجزء الرئيسي و يتميز الحد الرئيسي بوجود المتحول العقدي z في المقام.

* ملاحظات: $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+n}{n}\right)^n$, $e=\dfrac{1}{0!}+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots$

$$Res(f(z), i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\frac{3z-i}{z}}{(z-i)} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \left[\frac{3z-i}{z} \right]_{z=i}$$

$$= 2$$

طريقة ثانية: حسب صيغة كوشي التكاملية

مبرهنة: بفرض $a \in \mathbb{C}$ قطب من المرتبة n بالنسبة للتابع $f(z)$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$ عندئذ:

$$Res(f(z), a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \left[(z-a)^n \cdot f(z) \right]^{(n-1)}$$ "حفظ"

ملاحظة: ضربنا التابع $f(z)$ بالمقدار $(z-a)^n$ لأن الدالة لا تحوي نفس المقدار في المقام وبالتالي تتم عملية اختصار للمقدار $(z-a)^n$ ونضمن أن التابع معرّف ونستطيع أخذ النهاية.

الإثبات:

بما أن a قطب من المرتبة n بالنسبة للتابع $f(z)$ فإن متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ عند النقطة a من الشكل:

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots$$

نضرب الطرفين بـ $(z-a)^n$ فنجد:

$$(z-a)^n \cdot f(z) = a_{-n} + \cdots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + a_0(z-a)^n + a_1(z-a)^{n+1} + \cdots$$

نشتق الطرفين $(n-1)$ مرة فنجد:

$$\left[(z-a)^n f(z) \right]^{n-1} = (n-1)!\, a_{-1} + (n \ldots 2) a_0 (z-a) + a_1 ((n+1) \cdot n \cdot \ldots \cdot 3)(z-a)^2$$

نقسم الطرفين على $(n-1)!$ ثم نأخذ النهاية عندما $z \to a$ فنجد:

$$a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \left[(z-a)^n f(z) \right]^{(n-1)}$$

تمرين: أوجد الرواسب للتوابع التالية:

(1 $f(z) = \dfrac{3z - i}{z(z - i)}$ عند النقطة $a = i$

$$Res(f(z), i) = \frac{1}{0!} \lim_{z \to i} \left[(z - i) f(z) \right]^{0}$$

$$= \lim_{z \to i} \left(\frac{3z - i}{z} \right) = 2$$

ملاحظة: إذا كانت a قطب بسيط بالنسبة للتابع $f(z)$:

$$Res(f(z), a) = \lim_{z \to a} (z - a) f(z)$$

(2 $f(z) = \dfrac{e^{z} + 1}{(z - \frac{\pi}{2} i)(z^2 + 1)}$ عند النقطة $a = \frac{\pi}{2} i$

الحل:

$$Res\left(f(z), \frac{\pi}{2} i\right) = \lim_{z \to \frac{\pi}{2} i} \left(\frac{e^{z} + 1}{z^2 + 1} \right)$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi}{2} i} + 1}{(\frac{\pi}{2} i)^2 + 1} = \frac{i + 1}{-\frac{\pi^2}{4} + 1}$$

(3 $f(z) = \dfrac{ch z}{(z - \pi i)^2}$ عند النقطة $a = \pi i$

$\rightarrow$ ($a = \pi i$ قطب مضاعف)

$$Res(f(z), \pi i) = \frac{1}{1!} \lim_{z \to \pi i} (ch z)' = 0$$

(4 $f(z) = \dfrac{ch z}{(z - \pi i)^3}$ عند النقطة $a = \pi i$

قطب من المرتبة الثالثة

الحل:

$$Res\,(f(z),\pi i)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to\pi i}(ch z)''$$

$$=\frac{1}{2}\,ch(\pi i)=\frac{-1}{2}$$

$$ch(\pi i)=-\frac{e^{\pi i}+e^{-\pi i}}{2}=-1$$

5) $f(z)=\dfrac{2z+1}{(z-i)^3(z+1)}$ عند النقطة $a=i$

الحل:

$$Res\,(f(z),i)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\left(\frac{2z+1}{z+1}\right)''$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+1)^2}\right)'=\frac{1}{2}\left(\frac{-2}{(i+1)^3}\right)$$

$$=\frac{-1}{-i-3+3i+1}=\frac{1}{2-2i}=\frac{2+2i}{(2-2i)(2+2i)}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$$

ملحوظة من أجل التمرين الرابع:

• إذا كانت القوة زوجية فالناتج (٥)

• وإذا كانت القوة فردية فإن النتيجة الى التقارب نعطي بالعلاقة:

$$\frac{-1}{(n-1)!}$$

* وظيفة:

احسب الرواسب التالية:

1) $\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z}, 0\right)$

2) $\operatorname{Res}\left(\frac{\cos z}{(z-\frac{\pi}{4})^2}, \frac{\pi}{4}\right)$ قطب مضاعف

3) $\operatorname{Res}\left(\frac{2z+1}{(z+i)^3}, -i\right)$

4) $\operatorname{Res}\left(\frac{\ln z}{(z+i)^3}, -i\right)$

5) $\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z-\sin z}, 0\right)$

انتهت المحاضرة الثالثة عشرة